EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA ÜBUNG SS 2017

2. Übungsblatt für den 22.3.2017

2-1. Gegeben sind die komplexen 2×2-Matrizen $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathtt{i} \\ \mathtt{i} & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$.

a) Bestimmen Sie alle Elemente der Untergruppe $Q = \langle \{I, J\} \rangle \subset GL(2, \mathbb{C})$ (bezüglich der üblichen Matrizenmultikation)!

b) Geben Sie die Verknüpfungstabelle für die Gruppe Q an! (Bezeichnen Sie das Element $I \cdot J$ mit K.)

c) Geben Sie für jedes Element von Q dessen Ordnung an!

2-2. Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $\emptyset \neq H \subset G$ eine nicht leere Teilmenge von G.
Beweisen Sie: H ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn für alle $g, h \in H$ gilt: $g \circ h^{-1} \in H$.

2-3. Es sei $3 \leq \in \mathbb{N}$ und D_n die Diedergruppe mit $2n$ Elementen so wie in Definition 1.7.4 der Vorlesung gegeben.

a) Geben Sie alle Elemente von D_n an, und bestimmen Sie die Ordnung von jedem Gruppenelement! Interpretieren Sie diese Ergebnisse auch geometrisch, indem Sie D_n als die Symmetriegruppe eines regelmäßigen n-Ecks deuten!

b) b) Geben Sie im Fall, dass n eine Primzahl ist, alle Untergruppen von D_n an!

2-4. Es sei $\mathrm{GL}(n, R)$ die Menge der nichtsingulären $n \times n$-Matrizen mit Einträgen $a_{ij} \in R$, (hierbei sei R ein Ring). Analog sei $\mathrm{SL}(n, R)$ die Menge der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus R und Determinante 1. Untersuchen Sie, ob $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ bzw. $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ Gruppen sind. Geben Sie die Anzahl der Elemente von $SL(2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ und $SL(3, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ an, wobei p eine Primzahl ist. (Hinweis: Beispiel 1.2.6, (6).)

2-5. Es seien $(G, \circ_G), (H, \circ_H)$ Gruppen. Wir definieren das **direkte Produkt** $(G \times H, \circ)$ wie folgt. $G \times H = \{(g, h) : g \in G, h \in H\}$ ist das kartesische Produkt. Darauf verwenden wir die Verknüpfung:

$$(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) = (g_1 \circ_G g_2, h_1 \circ_H h_2).$$

Anschaulich handelt es sich also um ein komponentenweises Rechnen, wobei die Rechnung in der ersten Komponente ganz in G und die Rechnung der zweiten Komponente ganz in H stattfindet, und diese Rechnungen sich nicht gegenseitig beeinflussen. Wenn klar ist, dass es sich um das direkte Produkt von Gruppen handelt, schreibt man nur $G \times H$.

a) Man beweise, dass $G \times H$ wieder eine Gruppe ist.

b) Es seien $G_1 \leq G$ und $H_1 \leq H$ jeweils Untergruppen. Man beweise, dass $G_1 \times H_1$ eine Untergruppe von $G \times H$ ist.

c) Man überlege sich, ob alle Untergruppen von $G \times H$ die Form aus Teil b) haben müssen. (Falls ja: Beweis, falls nein: Beispiel).