EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA ÜBUNG SS 2017

3. Übungsblatt für den 29.3.2017

3-1. a) Definieren Sie das Zentrum $Z(G)$ einer Gruppe G. (Tipp: Ein Algebra-*Buch* Ihrer Wahl aufschlagen).
b) Beweisen Sie: Ist G abelsch, so gilt $Z(G) = G$.
c) Beweisen Sie: $Z(G) \lhd G$.

3-2. Beweisen Sie:
a) $G \times H$ ist abelsch, genau dann, wenn G und H abelsch sind.
b) Wenn G_1 und G_2 jeweils zyklisch sind, d.h. von einem Element erzeugt werden, und falls $\mathrm{ggT}(|G_1|, |G_2|) = 1$ ist, dann ist auch $G_1 \times G_2$ zyklisch.
c) Es seien $n_1, \cdots, n_k$ verschiedene natürliche Zahlen größer als 1. Weiter seien sie paarweise teilerfremd, d.h. $\mathrm{ggT}(n_i, n_j) = 1$ für $i \neq j$. Es sei G_i eine zyklische Gruppe der Ordnung n_i. Dann ist $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $n_1 n_2 \cdots n_k$.

3-3. Es sei p prim. Eine Gruppe G heißt p-Gruppe, wenn die Ordnung von jedem Element $g \in G$ eine p-Potenz ist: $\mathrm{ord}(g) = p^{s(g)}, s(g) \in \mathbb{N}_0$. Konstruieren Sie eine p-Gruppe mit unendlich vielen Elementen.

3-4. Es sei $G = \mathbb{Z}_{1729}^{\times}$, bestehend aus den Restklassen $a \in \{1, 2, \ldots, 1729\}$, die teilerfremd zu 1729 sind, mit Multiplikation modulo 1729. Man zeige: Für alle $x \in G$ gilt: $x^{1728} \equiv 1 \bmod 1729$. Bestimmen Sie die kleinste positive natürliche Zahl t, so dass für alle $x \in G$ gilt: $x^t \equiv 1 \bmod 1729$.

3-5. Es sei G eine Gruppe, und A, B Untergruppen von G. Zeigen Sie:

a) Wenn $A \lhd G$, dann ist $AB \leq G$. (Hierbei ist $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$ das Komplexprodukt).

b) Wenn $A \lhd G$ und $B \lhd G$, dann ist $AB \lhd G$.

c) Wenn $A \lhd G$, $B \lhd G$ und $A \cap B = \{e\}$, dann gilt für alle $a \in A, b \in B$ ist $ab = ba$. Weiterhin gilt: $AB \cong A \times B$ (direktes Produkt, siehe Blatt 2).