EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA ÜBUNG SS 2017

4. Übungsblatt für den 5.4.2017

4-1 a) Es sei $G = S_4$. Geben Sie für $d \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ mindestens jeweils eine Untergruppe von G mit Ordnung d an,
b) Geben Sie alle Normalteiler an. (Hinweis, es gibt genau zwei nichttriviale Normalteiler, einer davon hat vier Elemente, zu welcher der zwei Typen von Gruppen mit vier Elementen gehört er?).

4-2 Geben Sie alle Konjugiertenklassen der Gruppen A_5 und S_5 an. (Die Konjugiertenklasse von einem Element $g \in G$ enthält alle Elemente der Form hgh^{-1}, mit $h \in G$.)
Hinweis: sind alle Zykel der Länge 5 konjugiert zueinander?

4-3 a) Es sei $(G, \cdot)$ eine beliebige Gruppe und $a \in G$. Zeigen Sie, dass genau ein Gruppenhomomorphismus $\delta : (\mathbb{Z}, +) \to (G, \cdot)$ mit $\delta(1) = a$ existiert.
b) Klassifikationssatz für zyklische Gruppen
Ist C eine beliebige zyklische Gruppe, so gilt

$$C \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } |C| = \infty \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \text{falls } |C| = n \in \mathbb{N} \ . \end{cases}$$

(Tipp: Verwenden Sie Teil a) und den Homomorphiesatz!)

4-4 Es sei $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & r & s \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$.
a) Zeigen Sie, dass $G \leq \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ gilt.
b) Zeigen Sie, dass $Z(G) \cong \mathbb{R}$ gilt.
c) Zeigen Sie, dass $G/Z(G) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt.

Das Tutorium findet ab Freitag 29. März 2017 (8-10 Uhr), in SR 11.32 statt. (Natürlich können Sie das mit dem Tutor auf 8.15-9.45 oder ähnlich legen).