EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA ÜBUNG SS 2017

5. Übungsblatt für den 3.5.2017

5-1 Es sei G eine multiplikativ geschriebene Gruppe. Die Gruppe G operiere auf der Menge $X = G$ durch Konjugation, d.h. für alle $g \in G$ und für alle $x \in G$ sei $g \cdot x = gxg^{-1}$ (vgl. VO 1.12.3).

a) Zeigen Sie, dass die Menge der Fixpunkte unter dieser Operation das Zentrum von G ist.

b) Es sei nun zusätzlich p eine Primzahl und G eine endliche p-Gruppe. Beweisen Sie, dass $|Z(G)| \geq p$ gilt. Kann G eine einfache Gruppe sein?

5-2 Es sei G eine Gruppe mit Zentrum $Z(G)$.
a) Beweisen Sie: Ist $G/Z(G)$ eine zyklische Gruppe, so ist G eine abelsche Gruppe.
Folgern Sie aus diesem Resultat: Ist p eine Primzahl und $|G| = p^2$, so ist G eine abelsche Gruppe.
b) Es sei p eine Primzahl und G eine **nicht abelsche** Gruppe mit $|G| = p^3$. Wie viele Elemente muss dann $Z(G)$ haben, und welche Struktur muss die Gruppe $G/Z(G)$ haben?

5-3 (Forsetzung von (5-2), kann aber auch unabhängig gelöst werden:)
Es sei p prim und

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & r & s \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : r, s, t \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\} \text{ und } G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1+\bar{p}m & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : m \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \right\}.$$

(Hierbei ist $\bar{p}$ die Restklasse von p in $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.) Begründen Sie (kurz), dass $G_1 \leq GL(3, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ und $G_2 \leq GL(2, \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$. Zeigen Sie weiter,
a) dass $|G_1| = |G_2| = p^3$ gilt,
b) dass G_1 und G_2 nicht abelsch sind,
c) und dass G_1 und G_2 für $p > 2$ nicht isomorph zueinander sind. (Tipp zu c: Ordnungen der Elemente ansehen).

5-4 Beispiele zu den Isomorphiesätzen:

a) Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \mid b$. Berechnen Sie mit dem 2. Isomorphiesatz die Ordnung von $a\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$.

Zeigen Sie nun, mit dem 1. Isomorphiesatz, dass für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathrm{ggT}(m,n)\mathrm{kgV}(m,n) = mn.$$

(Hierbei kann der Satz von Bezout nützlich sein, dass die Zahlen der Form $mx + ny$, mit $x, y \in \mathbb{Z}$ genau die Menge $\mathrm{ggT}(m,n)\mathbb{Z}$ ergeben.

b) Beweisen Sie (vgl. auch Bsp 1.11.8): Jede Untergruppe $H \leq GL(2, \mathbb{R})$, mit $H \supseteq SL(2, \mathbb{R})$, ist bereits eine normale Untergruppe.
Hinweis: $GL(2, \mathbb{R})/SL(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$, und $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ist abelsch!

Das Tutorium findet Freitags 8-9.30 Uhr, in SR 11.32 statt.