EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA ÜBUNG SS 2017

6. Übungsblatt für den 17.5.2017

6-1 In dieser Aufgabe untersuchen wir die Drehungen des Würfels. Ziel ist es zu verstehen, dass die Gruppe aller Drehungen des Würfels isomorph zur Gruppe S_4 ist.

Gegeben sei ein Würfel W der Seitenlänge 2 im $\mathbb{R}^3$, mit den 8 Ecken:
$P_1 = (1, 1, 1), P_2 = (-1, 1, 1), P_3 = (-1, -1, 1), P_4 = (1, -1, 1)$,
$P_5 = (1, 1, -1), P_6 = (-1, 1, -1), P_7 = (-1. - 1, -1), P_8 = (1, -1, -1)$.

Definieren wir die 4 Raumdiagonalen durch $d_1 = \overline{P_1P_7}, d_2 = \overline{P_2P_8}, d_3 = \overline{P_3P_5}, d_4 = \overline{P_4P_6}$.

Unter einer Drehung von W verstehen wir eine lineare Abbildung aus $SO(3, \mathbb{R})$, die die geometrische Figur des Würfels bijektiv auf sich selbst abbildet.

a) Wir stellen zunächst 24 Drehungen auf, (siehe auch Skript).
Es gibt eine der Ordnung 1.
Es gibt je drei Drehungen (um $90^o, 180^o, 270^o$) um die drei Achen, die durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten gehen.

Untersuchen Sie, was bei diesen Drehungen mit den 4 Raumdiagonalen passiert, (jede Raumdiagonale wird auf eine der 4 Raumdiagonalen abgebildet, geben Sie die Permutation an.

Analog für die Drehungen durch gegenüberliegende Ecken und gegenüberliegende Kantenmittelpunkte.
Sie haben dann 24 Drehungen und 24 (verschiedene!) Permutationen der Raumdiagonalen.

b) Könnte es noch *weitere* Drehungen geben? Zeigen, Sie, dass eine *beliebige* Drehung des Würfels (wie oben definiert) eine Ecke auf eine Ecke abbildet.

Es seien nun φ_1, φ_2 beliebige Drehungen von W. Es sei $\varphi_1(d_i) = \varphi_2(d_i)$, für $i = 1, 2, 3, 4$. Zeigen Sie, dass $\varphi_1 = \varphi_2$. (Tipp: Methoden der Linearen Algebra!)

Wieso folgt daraus, das die Gruppe aller Drehungen des Würfels isomorph zur S_4 ist?

6-2 Es sei G eine Gruppe mit $|G| = pq$, wobei p und q prim sind, mit $p > q$. Zeigen Sie, dass G genau eine p-Sylowgruppe hat, und folgern Sie, dass G keine einfache Gruppe ist.

6-3 Es sei G eine Gruppe mit $|G| = 56$. Geben Sie die Anzahl der p-Sylowgruppen an und folgern Sie, dass G keine einfache Gruppe ist.

6-4 Es gibt zwei nicht-isomorphe Gruppen der Ordnung 21, nämlich $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ und die durch $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ mit Einträgen jeweils aus $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ erzeugte Gruppe, mit üblicher Matrizenmultiplikation. (Hinweis: es ist $X^7 = Y^3 = I$ und $4^3 \equiv 2^3 \equiv 1 \bmod 7$.) (Sie brauchen *nicht* zu zeigen, dass dies eine Gruppe ist.)

Beweisen Sie, dass es keine weitere (zu obigen nicht-isomorphe) Gruppe der Ordnung 21 gibt.

Gehen Sie gemäß der folgenden Anleitung vor, aber bitte die Schritte begründen!

(a) G hat eine eindeutige 7-Sylowgruppe: diese schreiben wir als
$P =< x : x^7 = e >$, d.h. alle von x erzeugten Elemente, wobei $x^7 = e$ gilt.
(b) Es gibt ein Element y der Ordnung 3.
(c) $yP = Py$, insbesondere ist $yxy^{-1} = x^i$ für ein geeignetes i mit $0 \leq i \leq 6$.
(d) Man zeige, dass $x = \ldots = y^2(yxy^{-1})y^{-2} = \ldots = (y^2xy^{-2})^i = \ldots = (yxy^{-1})^{i^2} = \ldots = x^{i^3}$, und damit $i^3 \equiv 1 \bmod 7$ gelten muss.

(e) Man überlege sich, dass die Gruppe $G :=< x, y : x^7 = y^3 = e, yxy^{-1} = x^i >$ bereits komplett definiert ist, sobald man ein festes i im vorhergehenden Schritt hat. Es kann bereits jetzt also höchstens 3 solche Gruppen geben.

(f) Falls $i = 1$ ist, ist G zyklisch.

(g) Ansonsten ist $i = 2$ oder 4. Falls $yxy^{-1} = x^2$, dann gilt $y^2xy^{-2} = x^4$.
Falls $yxy^{-1} = x^4$, dann gilt $y^2xy^{-2} = x^2$.
Warum sind die beiden letzten Fälle zueinander isomorph?

Das Tutorium findet Freitags 8-9.30 Uhr, in SR 11.32 statt.