EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA ÜBUNG SS 2017

7. Übungsblatt für den 31.5.2017

7-1 Es sei $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$, (genannt Ring der Gaußschen Zahlen).

(a) Zeigen Sie, dass R ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist, (kurz!)

(b) Berechnen Sie die Einheitengruppe $R^{\times}$.

(c) Definieren Sie eine geeignete Normabbildung, und zeigen Sie, dass der Ring mit dieser Norm ein euklidischer Ring ist.

(d) Ist R ein faktorieller Ring?

(e) Zeigen Sie, dass $2, 5$ und 13 in $\mathbb{Z}[i]$ nicht prim sind, dass aber $3, 7, 11$ prim sind. (Hinweis: verwenden Sie die Norm!)

(f) Es sei nun $p \equiv 3 \bmod 4$ eine Primzahl in $\mathbb{Z}$. Beweisen Sie, dass p auch in $R = Z[i]$ prim ist.

(g) Ein klassischer Satz der Zahlentheorie besagt: Eine Primzahl $p \equiv 1 \bmod 4$ kann in der Form $p = a^2 + b^2$, mit $a, b, \in \mathbb{N}$ geschrieben werden. Verwenden Sie diesen Satz (ohne Beweis), um alle Primelemente in $R = \mathbb{Z}[i]$ anzugeben.

(h) Zerlegen Sie 210 in prime Elemente (in $\mathbb{Z}[i]$).

7-2 Es sei $T = \left\{ a + \mathtt{i}\, b\sqrt{5} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{C}$. Man kann (leicht) nachrechnen, dass T ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass jeder Teilring R von $\mathbb{C}$, welcher $\{1, \mathtt{i}\sqrt{5}\}$ enthält, auch T enthalten muss!

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $N : T \to \mathbb{Z}$, gegeben durch $N(a + \mathtt{i}\, b\sqrt{5}) = a^2 + 5b^2$, ein Homomorphismus bezüglich der Multiplikation ist.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in T$ gilt: aus $x \mid y$ folgt $N(x) \mid N(y)$.

7-3 Im Ring T aus Beispiel **7-2** gilt: $21 = (1 + 2\mathtt{i}\sqrt{5})(1 - 2\mathtt{i}\sqrt{5}) = 3 \cdot 7$. Zeigen Sie, dass $T^{\times} = \{-1, 1\}$ und dass die Elemente $1 + 2\mathtt{i}\sqrt{5}$, $1 - 2\mathtt{i}\sqrt{5}$, 3 und $7 \in T$ irreduzibel, aber nicht prim sind!

Ist der Ring T faktoriell?

Hinweis: Beispiel 7-2 (c) kann helfen.