EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA ÜBUNG SS 2017

8. Übungsblatt für den 7.6.2017

8-1 Es sei $H = \{4k+1 : k \in \mathbb{N}\} = \{1, 5, 9, 13, \cdots\}$. Ein Element $h \in H \setminus \{1\}$ sei irreduzibel bezüglich H, falls man h nicht in der Form $h = h_1 h_2$ mit $h_1, h_2 \in H \setminus \{1\}$ schreiben kann.

Ein Element $p \in H \setminus \{1\}$ sei in H prim, falls aus $p \mid ab$ stets folgt $p \mid a$ (in H) oder $p \mid b$ (in H).

a) Bestimmen Sie die Menge der irreduziblen Elemente und die Menge der primen Elemente.
b) Man überlege sich (Beweis oder Gegenbeispiel), ob hier die eindeutige Zerlegung in irreduzible Elemente (bezüglich H) gilt.

8-2 Es sei R ein kommutativer Ring. Für $a \in R$ definieren wir die Abbildung μ_a durch:

$$\mu_a : R \to R$$
$$x \mapsto a\,x$$

Zeigen Sie:
(a) $a \in R$ ist eine Einheit von R genau dann, wenn μ_a surjektiv ist.
(b) $a \in R$ ist ein Nullteiler von R genau dann, wenn μ_a nicht injektiv ist.

Ziehen Sie daraus die folgenden Schlüsse:
(c) Jeder endliche kommutative Ring besteht nur aus Nullteilern und Einheiten.
(d) Jeder endliche Integritätsbereich ist ein Körper.

8-3 **Definition**: Es sei R ein Ring und $a, b \in R$.
$a \mid b$ genau dann, wenn es ein $c \in R$ gibt, so dass $ac = b$ gilt. Es sei $c, d \in R$. Falls $d \mid a$ und $d \mid b$ und falls für alle c mit $c \mid a$ und $c \mid b$ folgt, dass $c \mid d$, dann heißt d ein größter gemeinsamer Teiler von a und b.
(Hinweis: er muss nicht existieren bzw. muss nicht eindeutig sein!)
Da $\mathbb{Z}[i]$ ein euklidischer Ring ist, kann man den ggT mit dem euklidischen Algorithmus berechnen, (er existiert also).
Zur Aufgabe: Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus in $\mathbb{Z}[i]$:

$$d = \mathrm{ggT}(79 + 81i, 2 + 62i).$$

(Hinweis: $\frac{79+81i}{2+62i} = \frac{35}{26} - \frac{16}{13}i$. Raten Sie nun einen Näherungsquotienten $q \in \mathbb{Z}[i]$ und prüfen Sie, ob der Rest klein genug, usw.)
Stellen Sie dann mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus d als Linearkombination $d = ax + by$ dar.

8-4 (a) Man zeige, dass in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ keine eindeutige Zerlegung in irreduzible Elemente gelten kann. (Hinweis: Zerlegen Sie die Zahl 4).
(b) Man gebe ein Element in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ an, das irreduzibel aber nicht prim ist.
(c) Es sei $\alpha = 1 + \sqrt{-3}, \beta = 1 - \sqrt{-3}$. Man zeige, dass $\mathrm{ggT}(\alpha, \beta) = 1$ gilt.
(d) Man zeige, dass $\alpha\beta = 4$, aber dass weder α noch β ein Quadrat sind.
(e) Man zeige, dass $1 + \sqrt{-3}$ ein Teiler von 4 und $2 + 2\sqrt{-3}$ ist, dass aber 4 und $2 + 2\sqrt{-3}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ keinen ggT haben.