EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA ÜBUNG SS 2017

9. Übungsblatt für den 14.6.2017

9-1 (a) Es sei $R = \mathbb{R}[x]$ und f das Polynom mit $f(x) = x^2+1$. Zeigen Sie, dass f in R irreduzibel ist.
(b) Es sei (f) das von f erzeugte Ideal. Beschreiben Sie die Menge $K = \mathbb{R}[x]/(f)$. (Hinweis: Welche Polynome kommen als Elemente von K in Frage?)
(c) Zeigen Sie, dass K ein Körper ist.
(d) Zeigen Sie, dass K isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.

9-2 (a) Es sei p prim und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen. Es sei $f \in \mathbb{F}_3[x]$ das Polynom mit $f(x) = x^2 + 1$. Zeigen Sie, dass f irreduzibel (in $\mathbb{F}_3[x]$) ist.
(b) Es sei (f) das von f erzeugte Ideal. Beschreiben Sie die Menge $K = \mathbb{F}_3[x]/(f)$. (Hinweis: Welche Polynome kommen als Elemente von K in Frage? Wieviele Elemente hat K?)
(c) Zeigen Sie, dass K ein Körper ist.
(d) Geben Sie die Additions- und Multiplikationstafel an.
(e) Zeigen Sie, dass die Potenzen $(x + 1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ die Einheitengruppe $K^\times$ erzeugen. Geben Sie drei weitere Elemente an, deren Potenzen ebenfalls $K^\times$ erzeugen.
(f) Erklären Sie: um zwei Elemente in $K^\times$ zu multiplizieren, muss man keineswegs multiplizieren, sondern eigentlich "nur" addieren. (Was muss man addieren, und wie kommt man dann zum Ergebnis?)

9-3 Untersuchen, Sie, ob die folgenden Polynome in dem jeweiligen Ring irreduzibel sind, oder nicht.
(a) $X^2 + 5X + 1$ in $\mathbb{Z}[X]$
(b) $X^2 + 1$ in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ und in $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$
(c) $X^5 + 3X^2 + 3$ in $\mathbb{Q}[X]$
(d) $X^5 + 7$ in $\mathbb{Q}[X]$
(e) $X^3 + 2X^2 + 4X + 4$ in $\mathbb{Q}[X]$
(f) $X^3 + 2X^2 + 2X + 4$ in $\mathbb{Q}[X]$
(g) $X^2 + Y^2 - 1$ in $\mathbb{C}[X, Y]$
Und noch zwei schwerere Aufgaben (nicht zum Ankreuzen).
(h) $X^4 + 4Y^4$ in $\mathbb{Z}[X, Y]$
(i) $X^{500} + X^{375} + X^{250} + X^{125} + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$. Hinweis, versuchen Sie eine Substitution, um Eisenstein anzuwenden. Aber $Y = X^{125}$ wird (vermutlich) nicht die richtige Substitution sein.

9-4 Es sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass es unendlich viele irreduzible Polynome in $K[x]$ gibt. (Vergleichen Sie mit dem Beweis von Euklid für Primzahlen in $\mathbb{N}$.)

Info:
Für Vorlesungs-Klausur am 22.6. (8.00-10.00, HS H; TU) bitte (im tugraz-online) anmelden, wenn Sie teilnehmen möchten.
Für Übungs-Klausur am Mittwoch 28.6. (abends) keine Anmeldung erforderlich, (da wir davon ausgehen, dass alle, die die Übungen gemacht haben, auch zur Klausur kommen wollen). (Alle Teilnehmer schreiben in Räumen an der KF, genaueres wird noch bekanntgegeben.)

TU-Gruppen: Übung am 14.6.: in Seminarraum Analysis u Zahlentheorie, Kopernikusgasse 24, 2. Stock.