Proseminar Einführung in die Algebra, SS 17

Klausur am 28.6.2017

Pro Aufgabe sind maximal 4 Punkte erreichbar. Bitte jede Aufgabe auf einem eigenem Blatt lösen, und auf jedes abgegebene Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Übungsleiter schreiben

1. Zerlegen Sie 84 in $\mathbb{Z}[i]$ in irreduzible Elemente und berechnen Sie in $\mathbb{Z}[i]$ (mit einer Methode Ihrer Wahl) $\mathrm{ggT}(84, 15+15i)$.
2. Welche der folgenden Ringe sind Körper:
   (a) $\mathbb{Q}[X]/(X^2-3X+2)$.
   (b) $\mathbb{Q}[X]/(X^4-5X^3+10X-10)$.
   (c) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[X]/(X^2-5)$.
3. Es sei G eine Gruppe mit $\mathrm{ord}(g) \leq 2$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.
4. Es sei R ein kommutativer Ring. Ein $a \in R$ heißt nilpotent, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = 0$ gibt. Zeigen Sie, dass die Menge aller nilpotenten Elemente von R ein Ideal von R ist.
5. Wir betrachten die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und die Elemente
$$U = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$
   (a) Bestimmen Sie die Ordnungen von U, J und UJ.
   (b) Zeigen Sie $\langle U, J \rangle \neq \{U^k J^l \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$.