Name: **Matrikelnr.:**

Einführung in die Algebra 17. Juni 2019

Klausur zur Übung

Aufgabe	1	2	3	4		Σ V D
Punkte	8	8	8	8		=32 = *Punkte*

Es wird nicht nur das Ergebnis, sondern insbesondere auch der Rechenweg/die Argumentation bewertet. Begründen Sie Ihre Schritte ausreichend, d.h. z.B., wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung verwenden, sollte das klar werden, (zB. "Ein Satz der Vorlesung besagt, dass jede Gruppe mit Eigenschaft A auch Eigenschaft B hat.")

Wenn Sie bei einer Aufgabe nicht weiterkommen, beschreiben Sie bitte möglichst genau das prinzipielle Vorgehen, mit dem Sie die Aufgabe angehen wollten.

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein Blatt Din A4, doppelseitig, eigenhändig beschrieben.
Es sind *keine* elektronischen Hilfsmittel erlaubt.

Viel Erfolg!

1. Es sei S_n die symmetrische Gruppe der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

   a) Schreiben Sie die Permutation (123)(12345)(345) als Produkt von disjunkten Zyklen. (Hinweis zur Schreibweise: im Skript wurde vereinbart, dass Zyklen von rechts gelesen werden, so dass z.B: $(ab)(ac) = (acb)$.)

   b) Geben Sie einen theoretischen Grund an (z.B. Satz der Vorlesung), warum (12)(567)(34)(89) nicht als Produkt von 3er-Zyklen geschrieben werden kann.

   c) Es sei $n = 7$. Geben Sie die Anzahl der Permutationen der Form $(ab)(cd)(efg)$ an, wobei die $a, b, c, d, e, f, g \in \{1, \ldots, n\}$ paarweise verschieden sind.

   d) Zeigen Sie, dass eine Gruppe G mit genau 44 Elementen keine einfache Gruppe sein kann.

2. Es sei $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ der Ring der Gaußschen Zahlen. Die Norm ist $N(a + bi) = a^2 + b^2$.

   a) Faktorisieren Sie $5 \in R$ in irreduzible Elemente.

   b) Es sei $I = \{e + (2e + 5f)i : e, f \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass $\forall a, b \in I$ auch $a + b \in I$ und $\forall a \in I, r \in R$ auch $ra \in I$. Folgern Sie daraus, dass I ein Ideal von R ist.

   c) Finden Sie ein Element $t \in I \setminus \{0\}$ mit minimaler Norm.
   Ist I ein Hauptideal? Wenn ja, geben Sie eine entsprechende Darstellung an.

3. a) Begründen Sie, warum für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt: $x^3 - x \equiv 0 \bmod 3$.

   b) Zeigen Sie, dass $f(x) = x^3 - x + 2$ in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[x]$ irreduzibel ist.

   c) Erläutern Sie, wie man mit f einen Körper $\mathbb{F}_{27}$ mit genau 27 Elementen konstruieren kann, und geben Sie die 27 Elemente in Polynomschreibweise an.

   d) Berechnen Sie das Element x^4 in diesem Körper (in der Darstellung von c)).
   Können Sie ein Element $g \in \mathbb{F}_{27}$ angeben, so dass $xg = 1$ gilt?
   (Hinweis: $x(x^2 - 1) = x^3 - x$.)

   e) Zu einem Element α der Einheitengruppe $\mathbb{F}_{27}^\times$ des Körpers sei $\mathrm{ord}(\alpha)$ die Ordnung, d.h. der kleinste positive Exponent d, so dass $\alpha^d = 1$ gilt. Es sei S die Menge der Werte d, für die es ein $\alpha \in \mathbb{F}_{27}^\times$ gibt mit $\mathrm{ord}(\alpha) = \mathrm{d}$. Bestimmen Sie S.
   (Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden: die Potenzen $(2x)^i$ erzeugen $\mathbb{F}_{27}^\times$.
   Wie lautet daher $\mathrm{ord}(2x)$? Finden Sie ein α mit $\mathrm{ord}(\alpha) = (\mathrm{ord}(2x))/2$, usw.)

4. Zeigen Sie, dass es eine nicht-zyklische Gruppe der Ordnung 21 gibt:
   <u>Anleitung:</u>
   Es sei $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ und $U = \left(\left\{ \begin{pmatrix} 2^j & 0 \\ i & 4^j \end{pmatrix}, 0 \leq i \leq 6, 0 \leq j \leq 2 \right\}, \cdot \right)$,
   wobei $\cdot$ die Matrizenmultiplikation in $SL(2, \mathbb{Z}/(7\mathbb{Z}))$ ist.
   Zeigen Sie:

   a) $U \leq SL(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ mit $|U| = 21$.

   b) $< S, T > \leq U, \ \ | < S, T > | > 7$ und daher $< S, T >= U$.

   (Hinweis: Warum hat S die Ordnung 7 und T die Ordnung 3? Begründen Sie, dass alle Elemente in $< S, T >$ untere Dreiecksmatrizen sind. Was kann in der Matrix links unten stehen?

   c) Ist U abelsch?

   d) Warum ist U nicht zyklisch?