Name: **Matrikelnr.:**

Einführung in die Algebra 22. Juni 2017

Klausur

Aufgabe	1	2	3			Σ
Punkte	8	8	8			=24 = *Punkte*

Es wird nicht nur das Ergebnis, sondern insbesondere auch der Rechenweg/die Argumentation bewertet. Begründen Sie Ihre Schritte ausreichend, d.h. z.B., wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung verwenden, sollte das klar werden, (zB. "Ein Satz der Vorlesung besagt, dass jede Gruppe mit Eigenschaft A auch Eigenschaft B hat.")

Wenn Sie bei einer Aufgabe nicht weiterkommen, beschreiben Sie bitte möglichst genau das prinzipielle Vorgehen, mit dem Sie die Aufgabe angehen wollten.

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein Blatt Din A4, doppelseitig, eigenhändig beschreiben.
Es sind *keine* elektronischen Hilfsmittel erlaubt.

Viel Erfolg!

1. Es sei S_4 die symmetrische Gruppe der Permutationen von 4 Elementen $\{a, b, c, d\}$.

   a) Geben Sie $|S_4|$ an und beschreiben Sie alle Konjugationsklassen, (jeweils ein repräsentatives Element angeben, und die Anzahl der Elemente in der Konjugationsklasse). (Beispiel: Die Transpositionen (ab) bilden eine solche Klasse und es gibt ... Transpositionen). (Es ist keine lange Auflistung gefragt!)

   b) Geben Sie mit Begründung alle möglichen Ordnungen von Gruppenelementen an.
   Untersuchen Sie insbesondere, ob die Gruppe ein Element der Ordnung 8 hat.

   c) Geben Sie alle Normalteiler von S_4 an.

2. Es sei $R = \mathbb{Z}[\varrho] = \{a + b\,\varrho : a, b \in \mathbb{Z}, \rho = e^{2\pi i/3}\}$ der Eisensteinring mit Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen. In der Vorlesung wurde bewiesen, dass R ein euklidischer Ring ist (dies darf hier ohne Beweis verwendet werden). Es ist $\varrho = e^{2\pi i/3} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

   a) Zeigen Sie, dass $(a + b\rho)(a + b\bar{\varrho})$ ein Element des Ringes R ist, (wobei $\bar{z}$ die komplexe Konjugation von z bezeichne).

   b) Es sei nun $N(a + b\rho) = a^2 - ab + b^2$ die Norm des Ringes R.
   Untersuchen Sie, ob $1 + 3\varrho$ in R prim und/oder irreduzibel ist.
   Geben Sie alle $a + b\varrho \in R$ an mit $N(a + b\rho) = N(1 + 3\rho)$, für die $a > 0$ gilt, (mit Begründung, dass Sie alle gefunden haben).

   c) Rechnen Sie nach, dass gilt:
   $N((a + b\rho)(c + d\rho)) = N(a + b\rho)N(c + d\rho)$.

3. a) Zeigen Sie: hat das durch $f(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ definierte Polynom eine Nullstelle $x_0 \in \mathbb{Z}$, so ist x_0 ein Teiler von a_0.

   b) Zeigen Sie: Das Polynom $f(x) = x^4 - 10x^2 + 20 \in \mathbb{Z}[x]$ ist irreduzibel.

   c) Zeigen Sie: Das Polynom $f(x) = x^4 - 10x^2 + 20 \in \mathbb{R}[x]$ ist nicht irreduzibel. Zerlegen Sie dies Polynom in $\mathbb{R}[x]$ in irreduzible Elemente.