EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA ÜBUNG SS 2019

1. Übungsblatt für den 11.3.2019

Da diese Übung kurz nach den ersten Vorlesungen ist, werden wir diese gemeinsam besprechen, sind aber nicht zum Anzukreuzen. Genaue Uhrzeit wird noch aktualisiert.

1-1. Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Beweisen Sie, dass für beliebige $g, h \in G$ gilt:

a) $(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$

b) Ist $x \in G$ und gilt $g \circ x = h \circ x$, so folgt $g = h$ (Kürzungsregel von rechts).

Gibt es auch eine analoge Kürzungsregel von links?

1-2. Es sei $(G, \cdot)$ eine Halbgruppe. Beweisen Sie, dass G genau dann eine Gruppe ist, wenn für alle $a, b \in G$ folgende Aussage wahr ist:

es existiert genau ein $x \in G$ mit $a \cdot x = b$ und es existiert genau ein $y \in G$ mit $y \cdot a = b$.

1-3. Bestimmen Sie mit der Methode von Kapitel 1.3 der Vorlesung alle Gruppen mit 5 Elementen. Wie ließe sich dieses Beispiel mit Satz 1.7.15 der Vorlesung wesentlich kürzer lösen?

1-4. Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element $e \in G$ und $a \in G$ ein Element mit endlicher Ordnung $\operatorname{ord}(a) = n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Für $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ gilt: $a^{k_1} = a^{k_2} \Leftrightarrow n \mid (k_2 - k_1)$.

b) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $a^k = e \Leftrightarrow n \mid k$.

c) Für $m \in \mathbb{Z}$ und $b = a^m$ gilt: $\mathrm{ord(b)} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{ggT(m,n)}}$.

1-5. Es sei $A = \{3, 9, 15, 21\}$ und $\cdot$ die Multiplikation modulo 24. Untersuchen Sie, ob $(A, \cdot)$ assoziativ ist, multiplikativ abgeschlossen ist, ob jedes Element ein Inverses hat. Ist $(A, \cdot)$ eine Gruppe?

Wiederholen Sie aus früheren Kursen:
Definition von Gruppen, Untergruppen usw, Ringen, Körpern.
Euler φ-Funktion. Rechnen modulo m.
Erweiterter Euklidischer Algorithmus, Lemma von Bezout
Kenntnisse von Computer-Algebra Systemen (z.B. Mathematica, Sage).

Zur Übung können Sie einmal folgendes programmieren, (jetzt nicht zu Ankreuzen, aber nützlich für kommende Blätter).

Es sei $SL(2, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ die Menge aller 2×2-Matrizen $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, mit $\det M = 1 (\operatorname{mod} n)$. Die Verknüpfung $\cdot$ ist die Matrizenmultiplikation, bei der die Einträge modulo n reduziert werden. Zeigen Sie für $n = 7$, dass $SL(2, 7)$ eine Gruppe ist. Berechnen Sie die Anzahl der Elemente. Probieren Sie andere Primzahlwerte von n und raten Sie eine allgemeine Antwort. Finden Sie die kleinste positive Zahl t, so dass für alle $M \in SL(2, 7)$ die Matrix M^t die Einheitsmatrix ist.