EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA ÜBUNG SS 2019

2. Übungsblatt für den 18.3.2019

2-1. Es sei $GL(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ die Menge aller $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, mit $\det M \neq 0(\bmod p)$. Die Verknüpfung $\cdot$ ist die Matrizenmultiplikation, bei der die Einträge modulo n reduziert werden. Zeigen Sie für alle n, p, dass $GL(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ eine Gruppe ist. Berechnen Sie die Anzahl der Elemente.
((Folgendes zum Programmieren, also freiwillig, aber Sie sollten es probieren!!)) Finden Sie die kleinste positive Zahl t, so dass für alle $M \in GL(3,3)$ die Matrix M^t die Einheitsmatrix ist.

2-2. Es seien $x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ jeweils in $GL(3, \mathbb{Z})$. Zeigen Sie, dass die durch a und x erzeugte Gruppe endlich ist, bestimmen Sie die Ordnung, und welche Gruppe der bereits bekannten Beispiele ist es? (Tipp: berechnen Sie a^3, Matrizen der Form $x\,a^i, a^j\,x$ und die Ordnungen der Elemente. Auch bei mehrfacher Matrizenmultipilkation kann ein Computer helfen.)

2-3. Gegeben sind die komplexen 2×2-Matrizen $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathtt{i} \\ \mathtt{i} & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$.

a) Bestimmen Sie alle Elemente der Untergruppe $Q = \langle \{I, J\} \rangle \subset GL(2, \mathbb{C})$ (bezüglich der üblichen Matrizenmultikation)!

b) Geben Sie die Verknüpfungstabelle für die Gruppe Q an! (Bezeichnen Sie das Element $I \cdot J$ mit K.)

c) Geben Sie für jedes Element von Q dessen Ordnung an! Ist die Gruppe isomorph zu einer der in der Vorlesung bereits besprochenen Gruppen?

2-4. Es sei $3 \leq n \in \mathbb{N}$ und D_n die Diedergruppe mit $2n$ Elementen so wie in Definition 1.7.4 der Vorlesung gegeben.

a) Geben Sie alle Elemente von D_n an, und bestimmen Sie die Ordnung von jedem Gruppenelement! Interpretieren Sie diese Ergebnisse auch geometrisch, indem Sie D_n als die Symmetriegruppe eines regulären n-Ecks deuten!

b) Geben Sie im Fall, dass n eine Primzahl ist, alle Untergruppen von D_n an!

2-5. Es seien $(G, \circ_G), (H, \circ_H)$ Gruppen. Wir definieren das **direkte Produkt** $(G \times H, \circ)$ wie folgt. $G \times H = \{(g, h) : g \in G, h \in H\}$ ist das kartesische Produkt. Darauf verwenden wir die Verknüpfung:

$$(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) = (g_1 \circ_G g_2, h_1 \circ_H h_2).$$

Anschaulich handelt es sich also um ein komponentenweises Rechnen, wobei die Rechnung in der ersten Komponente ganz in G und die Rechnung der zweiten Komponente ganz in H stattfindet, und diese Rechnungen sich nicht gegenseitig beeinflussen. Wenn klar ist, dass es sich um das direkte Produkt von Gruppen handelt, schreibt man nur $G \times H$.

a) Man beweise, dass $G \times H$ wieder eine Gruppe ist.

b) Es seien $G_1 \leq G$ und $H_1 \leq H$ jeweils Untergruppen. Man beweise, dass $G_1 \times H_1$ eine Untergruppe von $G \times H$ ist.

c) Man überlege sich, ob alle Untergruppen von $G \times H$ die Form aus Teil b) haben müssen. (Falls ja: Beweis, falls nein: Beispiel).

Das Tutorium (gehalten von Adrian Fuchs) findet am Donnerstag nach der Vorlesung statt. (Termine in tugraz online, bei der VO). Der Raum ist vorher bis 10.00 und nachher ab 11.00 belegt, also bitte Rücksicht nehmen.