

3. Übungsblatt für den 25.3.2019

3-1. Beweisen Sie:

- $G \times H$ ist abelsch, genau dann, wenn G und H abelsch sind.
- Wenn G_1 und G_2 jeweils zyklisch sind, d.h. von einem Element erzeugt werden, und falls $\text{ggT}(|G_1|, |G_2|) = 1$ ist, dann ist auch $G_1 \times G_2$ zyklisch. Geben Sie ein (möglichst einfaches) erzeugendes Element an.
- Es seien n_1, \dots, n_k verschiedene natürliche Zahlen größer als 1. Weiter seien sie paarweise teilerfremd, d.h. $\text{ggT}(n_i, n_j) = 1$ für $i \neq j$. Es sei G_i eine zyklische Gruppe der Ordnung n_i . Dann ist $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $n_1 n_2 \dots n_k$.

3-2. Es sei p prim. Eine Gruppe G heißt p -Gruppe, wenn die Ordnung von jedem Element $g \in G$ eine p -Potenz ist: $\text{ord}(g) = p^{s(g)}$, $s(g) \in \mathbb{N}_0$. Konstruieren Sie eine p -Gruppe mit unendlich vielen Elementen.

3-3. Es sei $G = \mathbb{Z}_{1729}^\times$, bestehend aus den Restklassen $a \in \{1, 2, \dots, 1729\}$, die teilerfremd zu 1729 sind, mit Multiplikation modulo 1729. Man zeige: Für alle $x \in G$ gilt: $x^{1728} \equiv 1 \pmod{1729}$. Bestimmen Sie die kleinste positive natürliche Zahl t , so dass für alle $x \in G$ gilt: $x^t \equiv 1 \pmod{1729}$.

3-4. a) Es sei $G = S_4$. Geben Sie für $d \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ mindestens jeweils eine Untergruppe von G mit Ordnung d an. (Freiwillig: Überlegen Sie sich, wieviele verschiedene Untergruppen der Ordnung d es gibt.))

b) Geben Sie alle Konjugiertenklassen der S_4 an. (Die Konjugiertenklasse von einem Element $g \in G$ enthält alle Elemente der Form hgh^{-1} , mit $h \in G$.)

c) Geben Sie alle Normalteiler von S_4 an. (Ein Normalteiler ist eine geeignete Vereinigung von Konjugiertenklassen.) (Hinweis, es gibt genau zwei nichttriviale Normalteiler, einer davon hat vier Elemente, zu welcher der zwei Typen von Gruppen mit vier Elementen gehört er?).

3-5. Geben Sie alle Konjugiertenklassen der Gruppen S_5 und A_5 an. Hinweis: sind alle Zyklen der Länge 5 konjugiert zueinander?

Das Tutorium (gehalten von Adrian Fuchs) findet am Donnerstag nach der Vorlesung statt. (Termine in tugraz online, bei der VO). Der Raum ist vorher bis 10.00 und nachher ab 11.00 belegt, also bitte Rücksicht nehmen.