**EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA ÜBUNG SS 2019**

**4. Übungsblatt für den 1.4.2019**

**3-5.** Geben Sie alle Konjugiertenklassen der Gruppen $S_5$ und $A_5$ an. Hinweis: suchen Sie ein geeignetes **Buch**, in dem steht, dass Permutationen von gleichem Zykeltyp in $S_5$ konjugiert sind. Zeigen Sie dann: Für einen beliebigen Dreierzyklus $(abc)$ gibt es $g \in A_5$ mit: $(123) = g(abc)g^{-1}$. Aber es gibt kein $g \in A_5$ mit $(12345) = g(13524)g^{-1}$; es ist $(12345)^2 = (13524)$. (Das Kreuz von letzter Woche verfällt, also noch einmal ankreuzen:)

**4-1** a) Definieren Sie das Zentrum $Z(G)$ einer Gruppe $G$. (Tipp: Ein Algebra-*Buch* Ihrer Wahl aufschlagen).
b) Beweisen Sie: Ist $G$ abelsch, so gilt $Z(G) = G$.
c) Beweisen Sie: $Z(G) \lhd G$.

**4-2** Es sei $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & r & s \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$.
a) Zeigen Sie, dass $G \leq \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ gilt.
b) Zeigen Sie, dass $Z(G) \cong \mathbb{R}$ gilt.
c) Zeigen Sie, dass $G/Z(G) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt.

**4-3** Es sei $G$ eine multiplikativ geschriebene Gruppe. Die Gruppe $G$ operiere auf der Menge $X = G$ durch Konjugation, d.h. für alle $g \in G$ und für alle $x \in G$ sei $g \cdot x = gxg^{-1}$ (vgl. VO 1.12.3).

**a)** Zeigen Sie, dass die Menge der Fixpunkte unter dieser Operation das Zentrum von $G$ ist.

**b)** Es sei nun zusätzlich $p$ eine Primzahl und $G$ eine endliche $p$-Gruppe. Beweisen Sie, dass $|Z(G)| \geq p$ gilt. Kann $G$ eine einfache Gruppe sein? (Eine Gruppe heißt einfach, wenn sie nur die zwei trivialen Normalteiler hat.)

**4-4** Beispiele zu den Isomorphiesätzen:

**a)** Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \mid b$. Berechnen Sie mit dem 2. Isomorphiesatz die Ordnung von $a\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$.

Zeigen Sie nun, mit dem 1. Isomorphiesatz, dass für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathrm{ggT}(m, n)\mathrm{kgV}(m, n) = mn.$$

(Hierbei kann der Satz von Bezout nützlich sein, dass die Zahlen der Form $mx + ny$, mit $x, y \in \mathbb{Z}$ genau die Menge $\mathrm{ggT}(m, n)\mathbb{Z}$ ergeben.

**b)** Beweisen Sie (vgl. auch Bsp 1.11.8): Jede Untergruppe $H \leq GL(2, \mathbb{R})$, mit $H \supseteq SL(2, \mathbb{R})$, ist bereits eine normale Untergruppe.
Hinweis: $GL(2, \mathbb{R})/SL(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$, und $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ist abelsch!

**Hinweis: am Freitag 29.3. findet keine Einf.i.d.Algebra-Vorlesung statt.**