EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA ÜBUNG SS 2019

5. Übungsblatt für den 8.4.2019

5-1 Es sei G eine Gruppe mit Zentrum $Z(G)$.
a) Beweisen Sie: Ist $G/Z(G)$ eine zyklische Gruppe, so ist G eine abelsche Gruppe.
Folgern Sie aus diesem Resultat: Ist p eine Primzahl und $|G| = p^2$, so ist G eine abelsche Gruppe.
b) Es sei p eine Primzahl und G eine **nicht abelsche** Gruppe mit $|G| = p^3$. Wie viele Elemente muss dann $Z(G)$ haben, und welche Struktur muss die Gruppe $G/Z(G)$ haben?

5-2 (Forsetzung von (5-1), kann aber auch unabhängig gelöst werden:)
Es sei p prim und

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & r & s \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \ r, s, t \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\} \text{ und } G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \bar{p}m & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \ m \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \right\}.$$

(Hierbei ist $\bar{p}$ die Restklasse von p in $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.) Begründen Sie (kurz), dass $G_1 \leq GL(3, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ und $G_2 \leq GL(2, \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$. Zeigen Sie weiter,
a) dass $|G_1| = |G_2| = p^3$ gilt,
b) dass G_1 und G_2 nicht abelsch sind,
c) und dass G_1 und G_2 für $p > 2$ nicht isomorph zueinander sind. (Tipp zu c: Ordnungen der Elemente ansehen).

5-3 In dieser Aufgabe untersuchen wir die Drehungen des Würfels. Ziel ist es zu verstehen, dass die Gruppe aller Drehungen des Würfels isomorph zur Gruppe S_4 ist.

Gegeben sei ein Würfel W der Seitenlänge 2 im $\mathbb{R}^3$, mit den 8 Ecken:
$P_1 = (1, 1, 1), P_2 = (-1, 1, 1), P_3 = (-1, -1, 1), P_4 = (1, -1, 1)$,
$P_5 = (1, 1, -1), P_6 = (-1, 1, -1), P_7 = (-1. - 1, -1), P_8 = (1, -1, -1)$.

Definieren wir die 4 Raumdiagonalen durch $d_1 = \overline{P_1P_7}, d_2 = \overline{P_2P_8}, d_3 = \overline{P_3P_5}, d_4 = \overline{P_4P_6}$.

Unter einer Drehung von W verstehen wir eine lineare Abbildung aus $SO(3, \mathbb{R})$, die die geometrische Figur des Würfels bijektiv auf sich selbst abbildet.

a) Wir stellen zunächst 24 Drehungen auf, (siehe auch Skript).
Es gibt eine der Ordnung 1.
Es gibt je drei Drehungen (um $90^o, 180^o, 270^o$) um die drei Achsen, die durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Flächen gehen.

Untersuchen Sie, was bei diesen Drehungen mit den 4 Raumdiagonalen passiert, (jede Raumdiagonale wird auf eine der 4 Raumdiagonalen abgebildet, geben Sie die Permutation an.)

Analog für die Drehungen durch gegenüberliegende Ecken und gegenüberliegende Kantenmittelpunkte.
Sie haben dann 24 Drehungen und 24 (verschiedene!) Permutationen der Raumdiagonalen.

b) Könnte es noch *weitere* Drehungen geben? Zeigen, Sie, dass eine *beliebige* Drehung des Würfels (wie oben definiert) eine Ecke auf eine Ecke abbildet.

Es seien nun φ_1, φ_2 beliebige Drehungen von W. Es sei $\varphi_1(d_i) = \varphi_2(d_i)$, für $i = 1, 2, 3, 4$. Zeigen Sie, dass $\varphi_1 = \varphi_2$. (Tipp: Methoden der Linearen Algebra!)

Wieso folgt daraus, das die Gruppe aller Drehungen des Würfels isomorph zur S_4 ist?