EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA   ÜBUNG   SS 2019

6. Übungsblatt für den 29.4.2019

6-1 Es sei G eine Gruppe mit $|G| = pq$, wobei p und q prim sind, mit $p > q$. Zeigen Sie, dass G genau eine p-Sylowgruppe hat, und folgern Sie, dass G keine einfache Gruppe ist.

6-2 Es sei G eine Gruppe mit $|G| = 56$. Geben Sie die Anzahl der p-Sylowgruppen an und folgern Sie, dass G keine einfache Gruppe ist.

6-3 Es sei $H = \{4k+1 : k \in \mathbb{N}\} = \{1, 5, 9, 13, \ldots\}$. Ein Element $h \in H \setminus \{1\}$ sei irreduzibel bezüglich H, falls man h nicht in der Form $h = h_1 h_2$ mit $h_1, h_2 \in H \setminus \{1\}$ schreiben kann.

Ein Element $p \in H \setminus \{1\}$ sei in H prim, falls aus $p \mid ab$ folgt: $p \mid a$ (in H) oder $p \mid b$ (in H).

a) Bestimmen Sie die Menge der irreduziblen Elemente und die Menge der primen Elemente.
b) Man überlege sich (Beweis oder Gegenbeispiel), ob hier die eindeutige Zerlegung in irreduzible Elemente (bezüglich H) gilt.

6-4 Es sei R ein kommutativer Ring. Für $a \in R$ definieren wir die Abbildung μ_a durch:

$$\mu_a : R \to R$$
$$x \mapsto a\,x$$

Zeigen Sie:

(a) $a \in R$ ist eine Einheit von R genau dann, wenn μ_a surjektiv ist.
(b) $a \in R$ ist ein Nullteiler von R genau dann, wenn μ_a nicht injektiv ist.

Ziehen Sie daraus die folgenden Schlüsse:

(c) Jeder endliche kommutative Ring besteht nur aus Nullteilern, Einheiten und der 0.
(d) Jeder endliche Integritätsbereich ist ein Körper.