EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA ÜBUNG SS 2019

7. Übungsblatt für den 6.5.2019

7-1 Es sei $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$, (genannt Ring der Gaußschen Zahlen).

(a) Zeigen Sie, dass R ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist, (kurz!)

(b) Berechnen Sie die Einheitengruppe $R^\times$.

(c) Definieren Sie eine geeignete Normabbildung, und zeigen Sie, dass der Ring mit dieser Norm ein euklidischer Ring ist.

(d) Ist R ein faktorieller Ring?

(e) Zeigen Sie, dass $2, 5$ und 13 in $\mathbb{Z}[i]$ nicht prim sind, dass aber $3, 7, 11$ prim sind. (Hinweis: verwenden Sie die Norm!)

(f) Es sei nun $p \equiv 3 \bmod 4$ eine Primzahl in $\mathbb{Z}$. Beweisen Sie, dass p auch in $R = Z[i]$ prim ist.

(g) Ein klassischer Satz der Zahlentheorie besagt: Eine Primzahl $p \equiv 1 \bmod 4$ kann in der Form $p = a^2 + b^2$, mit $a, b, \in \mathbb{N}$ geschrieben werden. Verwenden Sie diesen Satz (ohne Beweis), um alle Primelemente in $R = \mathbb{Z}[i]$ anzugeben.

(h) Zerlegen Sie 210 in prime Elemente (in $\mathbb{Z}[i]$).

7-2 Definition: Es sei R ein Ring und $a, b \in R$.
$a \mid b$ genau dann, wenn es ein $c \in R$ gibt, so dass $ac = b$ gilt. Es sei $c, d \in R$. Falls $d \mid a$ und $d \mid b$ und falls für alle c mit $c \mid a$ und $c \mid b$ folgt, dass $c \mid d$, dann heißt d ein größter gemeinsamer Teiler von a und b.
(Hinweis: er muss nicht existieren bzw. muss nicht eindeutig sein!)
Da $\mathbb{Z}[i]$ ein euklidischer Ring ist, kann man den ggT mit dem euklidischen Algorithmus berechnen, (er existiert also).
Zur Aufgabe: Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus in $\mathbb{Z}[i]$:

$$d = \mathrm{ggT}(79 + 81i, 2 + 62i).$$

(Hinweis: $\frac{79+81i}{2+62i} = \frac{35}{26} - \frac{16}{13}i$. Raten Sie nun einen Näherungsquotienten $q \in \mathbb{Z}[i]$ und prüfen Sie, ob der Rest klein genug, usw.)
Stellen Sie dann mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus d als Linearkombination $d = ax + by$ dar.

7-3 (a) Man zeige, dass in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ keine eindeutige Zerlegung in irreduzible Elemente gelten kann. (Hinweis: Zerlegen Sie die Zahl 4).

(b) Man gebe ein Element in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ an, das irreduzibel aber nicht prim ist.

(c) Es sei $\alpha = 1 + \sqrt{-3}, \beta = 1 - \sqrt{-3}$. Man zeige, dass $\mathrm{ggT}(\alpha, \beta) = 1$ gilt.

(d) Man zeige, dass $\alpha\beta = 4$, aber dass weder α noch β ein Quadrat sind.

(e) Man zeige, dass $1 + \sqrt{-3}$ ein Teiler von 4 und $2 + 2\sqrt{-3}$ ist, dass aber 4 und $2 + 2\sqrt{-3}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ keinen ggT haben.