EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA ÜBUNG SS 2019

8. Übungsblatt für den 20.5.2019

8-1 Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Es ist $21 = 3 \cdot 7 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5})$. Untersuchen Sie, ob die Elemente $3, 7, 1 + 2\sqrt{-5}, 1 - 2\sqrt{-5}$ irreduzibel oder assoziert zueinander sind.
Mit den Ergebnissen können Sie schliessen, ob R ein Hauptidealring, bzw. ein faktorieller Ring ist.

8-2 Es sei $R = \mathbb{Z}, I = (360), J = (45)$. Es sei $I + J, I \cap J, IJ$ wie im Skript definiert. Weiter sei $I : J = \{r \in R : \forall x \in J \text{ gilt: } rx \in I\}$ und $\sqrt{I} = \{r \in R : r^n \in I, \text{ for some positive integer } n\}$ das sogenannte Radikal. Berechnen Sie $I + J, I \cap J, IJ, I : J, \sqrt{I}$.

8-3 Die Babylonier hatten Tontafeln, auf denen ganzzahlige Lösungen (x, y, z) der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ gelistet sind, wie zB. $(3, 4, 5), (5, 12, 13), \ldots$. Bereits Euklid hatte einen Beweis, dass man alle Lösungen mit einer einfachen Parametrisierung finden kann.

(a) Finden Sie (z.B. in Bibliothek oder Internet) Kopien der babylonischen Tafel, und des Abschnitts von Euklid zu dem Thema, und arbeiten Sie den Beweis durch.

(b) Betrachten Sie folgenden modernen Beweis:

  (i) Es reicht, im wesentlichen, sich auf Lösungen mit $\mathrm{ggT}(x, y, z) = 1$ zu beschränken, und dies impliziert dann auch, dass $\mathrm{ggT}(x, y) = \mathrm{ggT}(x, z) = \mathrm{ggT}(y, z) = 1$ ist.

  (ii) $(x = a^2 - b^2, y = 2ab, z = a^2 + b^2)$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ sind Lösungen. Es bleibt also zu zeigen, dass dies die einzigen Lösungen mit $\mathrm{ggT}(x, y, z) = 1$ sind.

  (iii) z ist ungerade. Und weiter entweder x ist gerade, und y ungerade, oder umgekehrt.

  (iv) Es gilt: $\mathrm{ggT}(x + iy, x - iy) = 1$ in $\mathbb{Z}[i]$.

  (v) $z^2 = (x + iy)(x - iy)$ impliziert, dass $x + iy$ ein Quadrat eines Elements in $\mathbb{Z}[i]$ sein muss, also $x + iy = (a + bi)^2$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$.

  (vi) Daraus folgt, dass $x = a^2 - b^2, y = 2ab, z = a^2 + b^2$.

8-4 (Von einer alten Klausur): Es sei gegeben der Ring $R = \mathbb{Z}[i] = \{a+b\,i : a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$, mit Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen, und Normabbildung $N(a+bi) = a^2 + b^2$.

a) Formulieren Sie (allgemein), was die Aussage “R ist ein euklidischer Ring” bedeutet.
Im folgenden dürfen Sie, ohne Beweis, annehmen, dass R ein euklidischer Ring ist.

b) Es seien $\sigma, \tau \in R$ und es sei $I = (\sigma, \tau)$ das von σ und τ erzeugte Ideal. Zeigen Sie, dass es ein $\mu \in R$ gibt, so dass $I = (\mu)$ gilt.

c) Es sei nun $\sigma = 4 - 4i$ und $\tau = 3 + 3i$. Geben Sie eine Zerlegung von σ und τ in Primfaktoren an, und erläutern sie, inwieweit diese eindeutig ist, und was “Primfaktoren” mit “irreduziblen” Elementen zu tun haben.

d) Geben Sie auch $\mathrm{ggT}(\sigma, \tau)$ an. Beschreiben Sie das Ideal $I = (\sigma, \tau)$ möglichst explizit, und geben Sie ein μ and, so dass $I = (\mu)$ gilt.

e) Warum ist $R = \mathbb{Z}[i]$ kein Körper? Kann man R zu einem Körper ergänzen?

Info: 1) Die Klausuren für Übung und Vorlesung sind freigeschaltet. Bitte anmelden!
Frage: Da einzelne Teilnehmer mit der Uhrzeit der Übungsklausur (ab 8.15) ein Problem hätten, die Frage, ob eine Verschiebung auf 9.15-11 Uhr in Frage kommt. Bitte Gründe, warum das nicht gehen würde, **zügig** per email an mich melden.
Info: 2) Möglicherweise erhalten Teilnehmer (insbesondere von KF) Informationen, die ich per email (zB über das teach-center) aussende nicht. Das Email-system verwendet Ihre im System hinterlegte TU-Emailadresse. Wenn Sie diese nicht verwenden, sollten Sie einen forward auf eine aktive Adresse setzen.) (Auch TU-Teilnehmer haben möglicherwesie mehrere TU-email-Adressen...) Ich sende ggf. vor Klausuren noch Info zu Themen, Uhrzeiten usw. aus...
Info 3): Sie könnten so langsam anfangen, Ihr handgeschriebenes Blatt für die Klausur zu beginnen. Erlaubt sind ein Blatt A4 (doppelseitig) oder 2 Seiten (einseitig).