EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA ÜBUNG SS 2019

9. Übungsblatt für den 27.5.2019

9-1 (a) Es sei p prim und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen. Es sei $f \in \mathbb{F}_3[x]$ das Polynom mit $f(x) = x^2 + 1$. Zeigen Sie, dass f irreduzibel (in $\mathbb{F}_3[x]$) ist.

(b) Es sei (f) das von f erzeugte Ideal. Beschreiben Sie die Menge $K = \mathbb{F}_3[x]/(f)$. (Hinweis: Welche Polynome kommen als Elemente von K in Frage? Wieviele Elemente hat K?)

(c) Zeigen Sie, dass K ein Körper ist. (kurz!)

(d) Geben Sie die Additions- und Multiplikationstafel an.

(e) Zeigen Sie, dass die Potenzen $(x+1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ die Einheitengruppe $K^\times$ erzeugen. Geben Sie drei weitere Elemente an, deren Potenzen ebenfalls $K^\times$ erzeugen.

(f) Erklären Sie: um zwei Elemente in $K^\times$ zu multiplizieren, muss man keineswegs multiplizieren, sondern eigentlich "nur" addieren. (Was muss man addieren, und wie kommt man dann zum Ergebnis?)

9-2 Untersuchen, Sie, ob die folgenden Polynome in dem jeweiligen Ring irreduzibel sind, oder nicht.

(a) $X^2 + 5X + 1$ in $\mathbb{Z}[X]$

(b) $X^2 + 1$ in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ und in $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$

(c) $X^5 + 3X^2 + 3$ in $\mathbb{Q}[X]$

(d) $X^5 - 120$ in $\mathbb{Q}[X]$

(e) $X^3 + 2X^2 + 4X + 4$ in $\mathbb{Q}[X]$

(f) $X^3 + 2X^2 + 2X + 4$ in $\mathbb{Q}[X]$

(g) $X^2 + Y^2 - 1$ in $\mathbb{C}[X, Y]$

Und noch zwei schwerere Aufgaben (nicht zum Ankreuzen).

(h) $X^4 + 4Y^4$ in $\mathbb{Z}[X, Y]$

(i) $X^{500} + X^{375} + X^{250} + X^{125} + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$. Hinweis, versuchen Sie eine Substitution, um Eisenstein anzuwenden. Aber die Substitution $Y = X^{125}$ wird (vermutlich) nur zeigen, dass es keine Faktoren der Form Polynom(Y) gibt.)

9-3 Untersuchen Sie alle Polynome in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]$ vom Grad (genau) 3, ob sie irreduzibel sind, oder nicht. (Wieviele Polynome vom Grad 3 gibt es?)

9-4 Es sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass es unendlich viele irreduzible Polynome in $K[x]$ gibt. (Vergleichen Sie mit dem Beweis von Euklid für Primzahlen in $\mathbb{N}$.)

Info:
Für die Klausuren bitte anmelden. (Falls Sie sich aus technischen Gründen nicht anmelden können, bitte mir ein Email senden.)

Für die Übungsklausur scheint allen auch die spätere Zeit (ab 9.15 Uhr) zu passen, so dass ich dies im System aktualisieren werde.