Mathematik 2 für ChemikerInnen im Sommersemester 2020
7. Übungsblatt

28. (a) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Halbkreises $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} : x^2 + y^2 \leq r^2\}$.
    (b) Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Kreissektors von 60^o und Radius r. (Legen Sie den Kreis geeignet in das Koordinatensystem).

29. Es sei $F_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, z \geq 0\}$. (Was ist dies geometrisch? Berechnen Sie den Schwerpunkt (x_S, y_S, z_S), wobei $x_S = \frac{\iiint_{F_r} x\,dV}{\iiint_{F_r} 1\,dV}$. (Siehe auch MfC I, Skript S.150). Analog für y_S und z_S.

30. Berechnen Sie den Wert des Integrals
$$\iint_B (x^2 + y^2)\,dxdy,$$
wobei B der Bereich ist, der von der x-Achse, der Geraden $y = -x$ und dem Kreis $x^2 + y^2 = 9$ beschränkt ist und den Punkt $P = (0, 1)$ enthält.

31. Es sei K_R eine Kugel (aus festem Material) vom Radius R. Wir berechnen die Rotationsenergie $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2$, wenn sich die Kugel jede Sekunde einmal um die eigene Achse dreht, (d.h. $\omega = 2\pi/s$). (Die Achse gehe durch den Mittelpunkt). Hier ist $J = \int\int\int_K r^2 \rho dV$ das Trägheitsmoment, wobei r der Abstand eines Punktes zur Drehachse ist. (r hängt also vom jeweiligen Punkt ab). Die Dichte ρ sei $1000kg/m^3$. Mit Masse $m = \rho V$ können Sie J in der Form CmR^2 schreiben, Berechnen Sie C und setzen Sie dies in E_{rot} ein.
Wie hängt E von R ab?
Hinweis: in Kugelkoordinaten rechnen. (Information zu Trägheitsmomenten, Winkelgeschwindigkeit usw. gibt es z.B. auch auf Wikipedia. Sie sollen allerdings J selber berechnen, und nicht eine fertige Formel nur nachschlagen.)

32. Die analoge Aufgabe für einen Zylinder zu berechnen, ist deutlich einfacher. Die Drehachse liege durch die Mittelpunkte der Kreisflächen. Führen Sie Zylinderkoordinaten ein: $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, z = z$ (in der x, y-Ebene sind das also Polarkoordinaten). Für die Jacobimatrix der Transformation gilt: $\det J_T = r$. Sei $Z(R, h)$ ein Zyliner mit Radius R und Höhe h. Berechnen Sie die Rotationsenergie E_{rot}. (Andere Details wie oben,)

33. Rechnen Sie nach, dass für die Jacobimatrix der Kugelkoordinaten $|\det J_T| = r^2 \sin\theta$ gilt.

34. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

35. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen: Bestimmen Sie (falls möglich) eine Matrix T, so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist. Berechnen Sie in diesem Fall auch A^{20}.
    (a)
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$
    (Vergleichen Sie mit Teil C der letzten Aufgabe.)

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen werden ganz am Ende groß. Zur Kontrolle: Es kommt die Zahl 3145726 im Endergebnis vor. Sie können ja mal Software suchen, die sowas berechnen kann (Wolfram Alpha, Matlab etc.)

Abgabe 8.5.2020
Bitte wie üblich bis Freitag 8.00 Uhr ankreuzen, und bis 10.00 die Lösungen hochladen. Beachten Sie bitte, dass Sie bitte Ihre Lösung ab jetzt nur in Form von **einem pdf** file hochladen können. (File Obergrenze ist 100MB, auch wenn 10MB sicher problemlos reichen sollte.)