Name	Vorname		Fachrichtung	Fachsemester
Matrikel-Nr.	Punkte	Bonuspunkte	Summe	Note

(K1)	(K2)	(K3)	(K4)	(K5)	(K6)

☐ *Ggf. ankreuzen: Mit Aushang des Ergebnisses unter meiner Matrikel-Nr. bin ich einverstanden.*

Technische Universität Clausthal
Institut für Mathematik
Prof. Dr. L. G. Lucht
Dr. C. Elsholtz

WS 2000/2001
19. März 2001

Klausur zur Ingenieurmathematik I

Wählen Sie von den nachstehenden sechs Aufgaben vier zur Bearbeitung aus.

(K1) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $3\cot x + 2\sin x = 0$.
Hinweis: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

(K2) Geben Sie die Nullstellen des Polynoms $f(z) := z^6 + 64$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an, und skizzieren Sie sie in der Gaußschen Zahlenebene.

(K3) Zeigen Sie durch Induktion, daß die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n+1} - 2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Hinweis: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$.

(K4) Die Vektoren $\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (0, 4, -3)$, $\vec{c} = (-1, 4, 0)$ im $\mathbb{R}^3$ führen vom Nullpunkt 0 zu den Punkten A, B, C.

(a) Berechnen Sie das Volumen V des von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ erzeugten Parallelotops (Spats), die Längen seiner vier Raumdiagonalen sowie die Fläche F des Dreiecks $\triangle(A, B, C)$.

(b) Wie lautet die Gleichung der Ebene $\mathcal{E}$ durch A, B, C, wie groß ist der Abstand d der Ebene $\mathcal{E}$ vom Nullpunkt, und welche Koordinaten hat der Fußpunkt des Lotes von 0 auf $\mathcal{E}$?

Hinweis: Die Fläche F in (a) ist eine rationale Zahl.

Bitte Rückseite beachten!

(K5) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\
2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 &= 1 \\
5x_1 + 13x_2 + 10x_3 \phantom{{}+ x_4} &= 4 \\
3x_1 + 7x_2 + 6x_3 - x_4 &= 3\,.
\end{aligned}$$

Hinweis: Die Umformungsschritte müssen erkennbar sein.

(K6) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von A.

(b) Ist A zu einer Diagonalmatrix D ähnlich? Geben Sie ggf. D und eine Transformationsmatrix S mit $D = SAS^{-1}$ an.