Klausur
20.01.2003

Algebra I

WS 2002/03
Dr. Elsholtz

Name, Vorname	Matr.nummer	Fachrichtung	Fachsemester

Ich benötige einen Schein. ◯

Ich habe bereits genug Scheine. ◯

Die folgende Klausur hat mehr Aufgaben als Sie berabeiten können/sollen.
Auf diese Weise haben Sie mehr Auswahl.
Bearbeiten Sie Teil I (Faktenwissen).
Bearbeiten Sie von Teil II (kurze Aufgaben zu Gruppen) genau 2 von 4.
Bearbeiten Sie von Teil III (umfangreichere Aufgaben zu Gruppen) genau 1 von 2.
Bearbeiten Sie von Teil IV (Aufgaben zu Idealen) genau 2 von 4.
Falls Sie mehr Aufgaben bearbeiten, werden die besten bewertet.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\sum$
Max. Punkte	18	6	4	3	4	9	9	9	8	8	8	
bearbeitet ? bitte ankreuzen!												
erreichte Punkte												

Note:

Name, Vorname

Teil I **Diese Aufgabe sollen Sie alle bearbeiten. Bitte schreiben Sie die Lösungen direkt hinter die Aufgabe. (Name auf das Blatt!!!) Wenn Sie eine Teilaufgabe nicht auf Anhieb wissen, beachten Sie bitte, dass Ihre Nachdenkzeit und die maximal erreichbare Punktzahl in Relation stehen sollten.**

Aufgabe 1

a) 1P Es sei S_n die symmetrische Gruppe und A_n die alternierende Gruppe. Wieviele Elemente haben A_n und S_n?

b) 1P Begründen Sie kurz, warum $A_n \lhd S_n$ gilt.

c) 1P Es sei R ein Ring. Geben Sie zwei Ideale von R an.

d) 1P Was können Sie über einen endlichen Integritätsbereich aussagen?

e) 1P Geben Sie alle Gruppen der Ordnung 15 an.

f) 1P Geben Sie alle Gruppen der Ordnung 10 an.

g) 1P Geben Sie alle Gruppen der Ordnung 21 an.

h) 3P Begründen Sie kurz, warum es nur endlich viele verschiedene Gruppen der Ordnung n gibt. Können Sie eine obere Schranke für die Anzahl angeben?

Achtung: weitere Fragen auf der Rückseite!

i) 2P Es sei G eine endliche Gruppe und $\alpha : G \to G$ eine Abbildung mit $\alpha^2 = id$. Begründen Sie (kurz!), warum die Anzahl der Fixpunkte von α genau dann ungerade ist, wenn $|G|$ ungerade ist. (Welcher Satz der Vorlesung ist hierbei nützlich?)

j) 2P Geben Sie 3 Beispiele für einen euklidischen Ring an.

k) 2 Punkte Geben Sie 2 Beispiele für einen Ring an, der kein Hauptidealring ist.

l) 2 Punkte Geben Sie 2 Beispiele für einen Ring mit Nullteilern an.

Name, Vorname

Teil II Bearbeiten Sie genau 2 der folgenden Aufgaben. Wenn Sie mehr Aufgaben bearbeiten, werden die besten bewertet. Die Aufgaben geben jeweils 3-6 Punkte.

Aufgabe 2 (2+4=6P)
Es sei G eine endliche Gruppe und X eine endliche G-Menge.

a) Formulieren Sie die Bahnengleichung und geben Sie damit eine Zerlegung von $|X|$ an. Erläutern Sie (kurz) die von Ihnen verwendete Notation.

b) Zeigen Sie: operiert eine Gruppe G der Ordnung 55 auf einer Menge X mit 18 Elementen, so gibt es mindestens 2 Fixpunkte.

Aufgabe 3 (4P)
Es sei G eine Gruppe mit 65 Elementen. Zeigen Sie, dass G zyklisch ist.

Aufgabe 4 (3P)
Es sei $(G, \cdot)$ eine kommutative Gruppe mit unendlich vielen Elementen. Es sei M die Menge derjenigen Elemente, die endliche Ordnung haben. Man zeige, dass M eine nichtleere Menge und $(M, \cdot)$ eine Untergruppe von $(G, \cdot)$ ist.

Aufgabe 5 (4P)

a) Zeigen Sie, dass Gruppen der Ordnung 68 einen nichttrivialen Normalteiler haben.

b) Wieviele Elemente der Ordnung 1,5 bzw. 17 (3 Fragen!) gibt es in einer Gruppe der Ordnung 68?

Name, Vorname

Teil III **Bearbeiten Sie genau eine der folgenden Aufgaben. Wenn Sie mehr Aufgaben bearbeiten, wird die beste bewertet. Die Aufgaben geben jeweils 9 Punkte**.

Aufgabe 6 (3+3+3P=9P)

a) Geben Sie die Konjugiertenklassen der Gruppe A_5 an. (Angabe eines Elementes und Größe der Klasse reicht).

b) Es sei G die Gruppe der Drehungen eines regulären Dodokaeders. Man gebe die Konjugiertenklassen von G an (geometrische Beschreibung eines typischen Elementes und Größe der Klasse).

c) Man erläutere kurz den Zusammenhang zwischen a) und b). Man skizziere einen Beweis, dass A_5 eine einfache Gruppe ist.

Aufgabe 7 (6P+3P=9P)

a) Zeigen Sie, dass Gruppen der Ordnung 48 einen nichttrivialen Normalteiler mit 8 oder 16 Elementen haben.
Anleitung: Falls es mehrere 2-Sylowgruppen P_1 und P_2 gibt. Zeigen Sie, dass $(P_1 \cap P_2) \lhd < P_1, P_2 >= G$ gilt.

b) Es seien p und q verschiedene Primzahlen mit $p < q$. Zeigen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung pq einen nichttrivialen Normalteiler hat.

Name, Vorname

Teil IV Bearbeiten Sie genau zwei der folgenden Aufgaben. Wenn Sie mehr Aufgaben bearbeiten, werden die besten gewertet. (Punktezahl ist hier deutlich verschieden!)

Aufgabe 8 (2+2+2+1+2=9P)

a) Gegeben ein Ring R. Formulieren Sie die Bedingungen an eine Abbildung (Norm), die R zu einem euklidischen Ring macht.

b) Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ Geben Sie eine geeignete Abbildung (von wo nach wo?) an, für die $N(\rho\sigma) = N(\rho)N(\sigma)$ gilt (Nachweis!).

c) Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ein euklidischer Ring ist.

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ein faktorieller Ring ist.

d) Berechnen Sie, (von der Definition ausgehend!) die Einheiten von $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

Aufgabe 9 (1+1+2+2+2=8P)

Es sei $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ und $R = \mathbb{Z}[\rho]$. Es sei I das von 6 und 3ρ erzeugte Ideal.

a) Man gebe für diesen Ring eine geeignete Norm an, die $\mathbb{Z}[\varrho]$ zum euklidischen Ring macht. (Nachweis der Normeigenschaften ist nicht verlangt).

b) Man bestimme das Element $\alpha \in I$ mit der kleinsten Norm.

c) Ist I ein Hauptideal? Man skizziere I in der komplexen Ebene.

d) Für $\sigma, \tau \in \mathbb{Z}[\rho]$ sei J das von σ und τ erzeugte Ideal. Ist J ein Hauptideal?

e) Geben Sie die Einheiten von $\mathbb{Z}[\rho]$ an.

Aufgabe 10 (2+1+1+2+2=8P)

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ kein faktorieller Ring ist. Zerlegen Sie hierzu ein geeignetes Ringelement in irreduzible Faktoren.

b) Ist $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ euklidisch? (Begründung!)

c) Können Sie einen anderen Ring R mit $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \subset R$ angeben, der euklidisch ist?

d) Definieren Sie für einen Intgritätsbereich den größten gemeinsamen Teiler zweier Ringelemente.

e) Man zeige, dass $1 + \sqrt{-3}$ ein Teiler von 4 und $2 + 2\sqrt{-3}$ ist, dass aber 4 und $2 + 2\sqrt{-3}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ keinen ggT haben.

Aufgabe 11 (2+2+2+2=8P)

a) Zerlegen Sie 85 in $\mathbb{Z}[i]$ in irreduzible Faktoren.

b) Zerlegen Sie $13 - 11i$ in $\mathbb{Z}[i]$ in irreduzible Faktoren.

c) Geben Sie einen ggT von 85 und $13 - 11i$ in $\mathbb{Z}[i]$ an.

d) Es sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Zeigen Sie: ist p in $\mathbb{Z}[i]$ in irreduzible Faktoren zerlegbar, so sind diese konjugiert komplex.