Blatt 1
16.10.2002

Algebra

WS 2002/03
Dr. Elsholtz

Ein paar Formalia zur Vorlesung.
Die Vorlesung wird als 3+1 Veranstaltung gehalten. Es besteht die Möglichkeit, Hausaufgaben abzugeben und einen Schein zu erwerben. Die Hausaufgaben werden von Alexander Herzog korrigiert. Die Übungen finden etwa alle 2 Wochen statt, es wird also etwa 6-7 Übungsblätter geben.
Scheinkriterien:
Um zu verhindern, dass jemand erst in der letzten Woche aktiv wird, setzt sich der Schein aus einer Vorleistung in Form von Hausaufgaben und einer Klausur zusammen. Für jeden, der Hausaufgaben gemacht hat, wird die Klausur dann aber recht leicht sein.

- Es gibt pro Aufgabe (unabhängig vom Schwierigkeitsgrad) 3 Punkte. Es sei n die Anzahl der Hausaufgabenblätter. Es müssen mindestens für $n-1$ Blätter mindestens 5 Punkte erreicht werden.
- Es können bis zu 3 Studenten gemeinsam Hausaufgaben abgeben. Allerdings muss dafür jeder Student mindestens eine Aufgabe an der Tafel vorrechnen.

Das eigentliche Scheinkriterium ist aber eine Klausur, die voraussichtlich am Semesterende geschrieben wird.

Aufgabe 1
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Es seien $a, b \in G$. Man zeige schrittweise mit Begründung jeden Schrittes, dass $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ ist.

Aufgabe 2

a) Es sei G eine endliche abelsche Gruppe mit neutralem Element e. Man zeige:
$$\prod_{x \in G} x^2 = e.$$

b) Gegeben sei eine Gruppe G mit folgender Eigenschaft: Für alle $x \in G$ gilt $x^2 = e$, wobei e das neutrale Element in G bezeichne. Man zeige: G ist abelsch.

Aufgabe 3
Folgende Rechenregeln sind sehr nützlich. Man beweise möglichst detailliert Teil a). Die Teile b) und c) brauchen nicht bewiesen werden (wir wollen uns nicht unnötig lange mit sehr elementaren Dingen beschäftigen, sondern möglichst zügig zu neuen und interessanteren Themen kommen).
Es sei $g \in G, r, s \in \mathbb{Z}$. Wir definieren $g^0 = e, g^1 = g, g^2 = g \cdot g, g^n = g \cdot g^{n-1}$ für positives n und $g^n = (g^{-n})^{-1}$ für negatives n.

a) Man zeige detailliert, dass $g^r g^s = g^{r+s} = g^s g^r$ gilt.

b)
$$(g^r)^s = g^{rs}.$$

c)
$$g^{-r} = (g^{-1})^r = (g^r)^{-1}.$$

Aufgabe 4
Man beweise, (wobei alle drei Teile der vorherigen Aufgabe verwendet werden können):
Es sei $g \in G$ ein Element der Ordnung n. Dann gilt $g^r = g^s$ genau dann, wenn $n \mid r - s$. Insbesondere gilt $g^k = e$ genau dann, wenn $n \mid k$.

Aufgabe 5
Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Es sei I eine beliebige Indexmenge und es seien $(H_i, \cdot)$ für $i \in I$ Untergruppen von $(G, \cdot)$. Man beweise, dass dann

$$\bigcap_{i \in I} H_i = \{g \in G : g \in H_i \text{ für alle } i \in I\}$$

eine Untergruppe von G ist.

Die folgende Aufgabe ist keine Hausaufgabe, aber wer Interesse hat, kann sie sich einmal ansehen.

Aufgabe 6
Man bestimme (bis auf Isomorphie) alle Gruppen mit genau $5, 6, 7, 8, 9, 10$ Elementen. Ggf. kann man auch ein Computerprogramm schreiben. Wir werden noch einige Sätze kennenlernen, die diese Aufgabe erleichtern.

Die Hausaufgaben sind am Mittwoch, 23.10.02 vor der Vorlesung abzugeben. Die erste Übung findet am Montag, 28.10.02, 15 Uhr statt.