Blatt 2
23.10.2002

Algebra

WS 2002/03
Dr. Elsholtz

Hinweise: Im Lesezimmer der Bibliothek habe ich ca. 15-20 Bücher zur Algebravorlesung bereitgestellt. Darunter sind einige fortgeschrittene klassische Werke, aber auch eine Reihe leichter lesbare Bücher. Empfehlenswert sind z.B. die Algebrabücher von Meyberg und Bosch; zur Gruppentheorie insbesondere auch das Buch von Humphreys.
Auf folgender WWW Seite findet man die Übungsblätter, und mit einiger Verzögerung auch ein Skript.
http://www.math.tu-clausthal.de/Arbeitsgruppen/Zahlentheorie/elsholtz/algebra1/vorlesung.html

Aufgabe 1
Es seien $(G, \circ_G), (H, \circ_H)$ Gruppen. Wir definieren das **direkte Produkt** $(G \times H, \circ)$ wie folgt. $G \times H = \{(g,h) : g \in G, h \in H\}$ ist das kartesische Produkt. Darauf verwenden wir die Verknüpfung:

$$(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) = (g_1 \circ_G g_2, h_1 \circ_H h_2).$$

Anschaulich handelt es sich also um ein komponentenweises Rechnen, wobei die Rechnung in der ersten Komponente ganz in G und die Rechnung der zweiten Komponente ganz in H stattfindet, und diese Rechnungen sich nicht gegenseitig beeinflussen. Wenn klar ist, dass es sich um das direkte Produkt von Gruppen handelt, schreibt man nur $G \times H$.

a) Man beweise, dass $G \times H$ wieder eine Gruppe ist.

b) Es seien $G_1 \leq G$ und $H_1 \leq H$ jeweils Untergruppen. Man beweise, dass $G_1 \times H_1$ eine Untergruppe von $G \times H$ ist.

c) Man überlege sich, ob alle Untergruppen von $G \times H$ die Form aus Teil b) haben müssen. (Falls ja: Beweis, falls nein: Beispiel).

Aufgabe 2
Man beweise:

a) $G \times H$ ist abelsch, genau dann, wenn G und H abelsch sind.

b) Wenn G_1 und G_2 jeweils zyklisch sind, d.h. von einem Element erzeugt werden, und falls $\mathrm{ggT}(|G_1|, |G_2|) = 1$ ist, dann ist auch $G_1 \times G_2$ zyklisch.

c) Es seien $n_1, \cdots, n_k$ verschiedene natürliche Zahlen grösser als 1. Weiter seien sie paarweise teilerfremd, d.h. $\mathrm{ggT}(n_i, n_j) = 1$ für $i \neq j$. Es sei G_i eine zyklische Gruppe der Ordnung n_i. Dann ist $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $n_1 n_2 \cdots n_k$.

Bei den folgenden beiden Aufgaben ist es nützlich, wenn Sie sich an die Definitionen der Gruppen A_n und S_n aus Ihrer Lineare Algebra Vorlesung erinnern. Mit S_n bzeichnen wir die Gruppe aller $n!$ Permutationen von n Elementen. Permutationen können bequem in Zykelschreibweise geschrieben werden. Wiederholen Sie zunächst etwas, wie man Zykel multipliziert. Beispiel: (1234)(24): 1 geht auf 2. 2 geht erst auf 4, dann auf 1. 3 geht auf 4. 4 geht erst auf 2 dann auf 3. Das Ergebnis ist also (12)(34).

Aufgabe 3

Man gebe alle (!) Untergruppen der Gruppe S_4 mit höchstens 6 Elementen an. (Es sollen also auch isomorphe Untergruppen einzeln aufgezählt werden, wenn sie verschiedene Elemente aus S_4 enthalten). Man ordne diese Liste geeignet. (Wer möchte, kann auch alle weiteren Untergruppen angeben und versuchen, ein komplettes Untergruppendiagramm zu erstellen.)

Aufgabe 4

Es sei A_n die Gruppe aller $\frac{n!}{2}$ geraden Permutationen, d.h. aller Permutationen, die als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen (a, b) geschrieben werden können. Man beweise, dass für $n \geq 3$ die Gruppe A_n von den Zykeln $(1, 2, 3), (1, 2, 4), \ldots (1, 2, n)$ erzeugt wird. Hieraus folgere man, dass ein Normalteiler $N \lhd A_n$, der einen Dreierzyklus enthält, mit A_n übereinstimmt.

Die Hausaufgaben sind am vor der Vorlesung abzugeben. Die zweite Übung findet am Mittwoch, 06.11.02, 17 Uhr statt.