Blatt 3
6.11.2002

Algebra

WS 2002/03
Dr. Elsholtz

Hinweise: Im Lesezimmer der Bibliothek habe ich ca. 15-20 Bücher zur Algebravorlesung bereitgestellt. Darunter sind einige fortgeschrittene klassische Werke, aber auch eine Reihe leichter lesbare Bücher. Empfehlenswert sind z.B. die Algebrabücher von Meyberg und Bosch; zur Gruppentheorie insbesondere auch das Buch von Humphreys.
Auf folgender WWW Seite findet man die Übungsblätter, und mit einiger Verzögerung auch ein Skript.
http://www.math.tu-clausthal.de/Arbeitsgruppen/Zahlentheorie/elsholtz/algebra1/vorlesung.html
Die erste Aufgabe ist eine gute NICHT-mathematimatische Übung und gibt immerhin einen (nicht 3) Hausaufgabenpunkte.

Aufgabe 1
Suchen Sie im Internet nach dem Bild, das alle Untergruppen der symmetrischen Gruppe auf 4 Elementen schematisch beschreibt. (Wie würden Sie das Bild nennen?)

Aufgabe 2

a) Definieren Sie das Zentrum $Z(G)$ einer Gruppe G. (In der Bibliothek ein geeignetes Buch aufschlagen).

b) Beweisen Sie: Ist G abelsch, so gilt $Z(G) = G$.

c) Beweisen Sie: $Z(G) \lhd G$.

Aufgabe 3
Es sei p prim und G eine Gruppe mit $|G| = p^n$. Dann enthält $Z(G)$ mehr als ein Element.
(Tipp: Zerlegung von G in Bahnen=Konjugiertenklassen, Bahnengleichung).

Aufgabe 4
Es sei p prim. Eine Gruppe G heisst p-Gruppe, wenn die Ordnung von jedem $g \in G$ eine p-Potenz ist: $\mathrm{ord}(g) = p^{s(g)}$. Man beachte, dass wir nicht vorausgesetzt haben, dass G eine endliche Gruppe ist.
Beweisen oder widerlegen Sie:
Die Gruppenordnung $|G|$ ist eine endliche Primzahlpotenz.

Aufgabe 5

Definition: Eine Gruppe G heisst zyklisch, wenn es ein Element $g \in G$ gibt, so dass $G =< g >$ gilt, wobei $< g >$ die von g erzeugte Untergruppe von G ist. Beachten Sie, dass $\mathbb{Z}$ und $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ zyklische Gruppen sind.
Es sei nun G eine zyklische Gruppe. Beweisen Sie:

a) Enthält G unendlich viele Elemente, so ist $G \cong \mathbb{Z}$.

b) Ist $|G| = N < \infty$, so ist $G \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Aufgabe 6

a) Es sei G eine endliche Gruppe, bei der $G/Z(G)$ zyklisch ist. Man zeige G ist abelsch. (Gilt Ihr Beweis auch für unendliche Gruppen?)

b) Es sei p prim und G eine Gruppe mit $|G| = p^2$. Man zeige G ist abelsch.

Aufgabe 7

Es sei p prim. Klassifizieren Sie alle Gruppen mit $|G| = p^2$.

Die Hausaufgaben sind am 13.11.02 vor der Vorlesung abzugeben.

Die nächste Aufgabe gibt 7 Aufgabenpunkte, selbst bei Abzügen bleiben also noch 5 übrig... Ausserdem haben Sie für diese Aufgabe 3 Wochen Zeit.

Aufgabe 8
Lesen Sie den Artikel von Landau. Uns interessiert daran der gruppentheoretische Teil, der im allerletzten Satz steht: Es gibt nur endlich viele endliche Gruppen mit r Konjugiertenklassen.
Schreiben Sie einen eigenen Artikel, möglichst mit der modernen Fachsprache und Notation, möglichst selbsterklärend usw., der obige Aussage beweist.
Einige Anregungen dazu:

- Sie können dabei z.B. zweiteilig verfahren. In einem ersten Teil möglichst kurz und elegent die Endlichkeit nachweisen und in einem zweiten Teil durch etwas genaueres Rechnen eine explizite obere Schranke für die Anzahl der Gruppen mit Anzahl der Konjugiertenklassen r angeben.
- Es ist NICHT die Aufgabe, den obigen Artikel abzuschreiben, sondern den Satz elegant zu beweisen!!! Alles, was dazu nicht nötig ist, können Sie vergessen, alles was für einen selbsterklärenden Aufsatz noch definierenswert ist, sollte auch definiert werden.
- Finden Sie für sehr kleine r vielleicht explizite Beispiele? Wieviele Gruppen gibt es, welche Gruppenordnungen kommen vor?
- Wer LaTeX kann, kann die Arbeit gerne tippen. Wer LaTeX nicht kann, kann gerne die Gelegenheit nutzen, damit einen kurzen ersten Aufsatz zu schreiben.
- Versuchen Sie Literatur anzugeben. Wo ist der Aufsatz von Landau erschienen? Finden Sie Hinweise zu der Aufgabe in anderen Büchern oder im Internet? Sie können gerne in einem Abschnitt oder in der Einleitung Ergebnisse zitieren, die sie nicht beweisen.