Blatt 4
13.11.2002

Algebra

WS 2002/03
Dr. Elsholtz

Aufgabe 1
Es sei G eine endliche Gruppe mit Untergruppen G_1 und G_2. Es seien $|G_1| = p_1$ und $|G_2| = p_2$ jeweils Primzahlen. Untersuchen Sie $G_1 \cap G_2$.

Aufgabe 2
Es seien m und n zwei natürliche Zahlen mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Beweisen Sie, dass $C_{mn} \cong C_m \times C_n$ gilt.

Aufgabe 3

i) Beweisen Sie, dass es höchstens zwei Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung 21 gibt.

ii) Zeigen Sie die Existenz einer nichtzyklischen Gruppe mit 21 Elementen.
Hinweis: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ mit Einträgen jeweils aus $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4
Es seien $p < q$ ungerade Primzahlen. Geben Sie eine möglichst allgemeine Bedingung an p und q an, unter der Sie beweisen können, dass die zyklische Gruppe die einzige Gruppe der Ordung pq ist.

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass Gruppen der Ordnung 56 einen nichttrivialen Normalteiler haben.

Aufgabe 6
Zeigen Sie, dass Gruppen der Ordnung 36 einen nichttrivialen Normalteiler haben.

Aufgabe 7
Zeigen Sie, dass Gruppen der Ordnung 48 einen nichttrivialen Normalteiler haben.

Aufgabe 8

a) Die Quaternionengruppe besteht aus den 8 Elementen $\pm e, \pm i, \pm j, \pm k$. (Man überlege sich, dass diese Definition Sinn macht! Es gilt $i^2 = j^2 =$

$k^2 = -e, ij = k, jk = i, ki = j, ij = -ji, kj = -jk, ki = -ik$. Wie kann man die Assoziativität schnell einsehen?

b) Man gebe so viele nichtisomorphe Gruppen mit Ordnung 8 wie möglich an. (Beweis, dass man alle hat, ist nicht gefordert). Man gebe dazu die Untergruppendiagramme an.

Abgabe am Mi. 27.11., 17 Uhr.