Blatt 5
4.12.2002

Algebra

WS 2002/03
Dr. Elsholtz

Definition: Es sei R ein Ring und $ab \in R$.
$a \mid b$ genau dann, wenn es ein $c \in R$ gibt, so dass $ac = b$ gilt.
Es sei $c, d \in R$. Falls $d \mid a$ und $d \mid b$ und falls für alle c mit $c \mid a$ und $c \mid b$ folgt, dass $c \mid d$, dann heisst d ein größter gemeinsamer Teiler von a und b. (Hinweis: er muss nicht existieren bzw. muss nicht eindeutig sein!)

Aufgabe 1
Man vervollständige folgende Beweisidee für einen Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen in $\mathbb{Z}$ gibt. Es sei $p_1 = 2, p_2 = 3, p_4 = 5, p_4 = 7$ etc. Angenommen, es gebe nur endlich viele Primzahlen, dann ... Betrachten Sie $p_1 + 1 = 3$, $p_1p_2 + 1 = 7$, $p_1p_2p_3 + 1 = 31$, $p_1p_2p_3p_4 + 1 = 211$. (Sorgfältig argumentieren!)

Aufgabe 2 (Beispiel von Hilbert)
Es sei $H = \{4k + 1 : k \in \mathbb{N}\} = \{1, 5, 9, 13, \cdots\}$. Ein Element $h \in H \setminus \{1\}$ sei irreduzibel bezüglich H, falls man h nicht in H aufpalten kann: $h = h_1h_2$ mit h_1, h_2.
Ein Element $p \in H \setminus \{1\}$ sei in H prim, falls aus $p \mid ab$ stets folgt $p \mid a$ (in H) oder $p \mid b$ (in H).

a) Man bestimme die Menge der irreduziblen Elemente und die der primen Elemente.

b) Man überlege sich (Beweis oder Gegenbeispiel), ob hier die eindeutige Zerlegung in irreduzible Elemente (bezüglich H) gilt.

Aufgabe 3

i) Man zeige, dass in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ keine eindeutige Zerlegung in irreduzible Elemente gelten kann. (Hinweis: Zerlegen Sie die Zahl 4).

ii) Man gebe ein Element in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ an, dass irreduzibel aber nicht prim ist.

iii) Es sei $\alpha = 1 + \sqrt{-3}, \beta = 1 - \sqrt{-3}$. Man zeige, dass $\mathrm{ggT}(\alpha, \beta) = 1$ gilt.

iv) Man zeige, dass $\alpha\beta = 4$, aber dass weder α noch β ein Quadrat sind.

v) Man zeige, dass $1+\sqrt{-3}$ ein Teiler von 4 und $2+2\sqrt{-3}$ ist, dass aber 4 und $2+2\sqrt{-3}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ keinen ggT haben.

Aufgabe 4

i) Man zeige, dass $u \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ genau dann eine Einheit ist, wenn $N(u) = a^2 - 3b^2 = 1$.

ii) Man zeige, dass die Potenzen von $u = 2-\sqrt{3}$ unendlich viele verschiedene Einheiten von $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ erzeugen.

iii) Man gebe analog unendlich viele Einheiten von $\mathbb{Z}[\sqrt{17}]$ an.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ das Element 8 als Produkt von zwei und als Produkt von drei irreduziblen Faktoren geschrieben werden kann.

Aufgabe 6

(i) Man zeige, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ein Ring ist.

(ii) Man zeige, dass es in diesem Ring Elemente gibt, die zwar unzerlegbar, aber nicht prim sind. Ist hier die Zerlegung in „unzerlegbare Elemente“ eindeutig?

Folgende Aufgabe ist eine gute Übung, wird aber nicht korrigiert werden.

Aufgabe 7

Wir untersuchen den Ring der ganzen Gaussschen Zahlen:
$\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \,|a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$.

(i) Man bestimme die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}[i]$.

(ii) Man beweise, dass dieser Ring mit der Norm $N(a + bi) = a^2 + b^2$ euklidisch ist. Ist $\mathbb{Z}[i]$ faktoriell ?

(iii) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Man zeige:

$$p \text{ ist prim in } \mathbb{Z}[i] \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{l} p \text{ kann nicht in der Form} \\ p = a^2 + b^2, a, b \in \mathbb{Z} \text{ geschrieben werden.} \end{array}$$

(iv) Man zerlege 210 in Primelemente aus $\mathbb{Z}[i]$.

(v) Der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}[i]$ ist isomorph zu
$\mathbb{Q}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Aufgabe 8
Man gebe alle ggT's von $10 + 11i$ und $8 + i$ an.

Aufgabe 9
Sei I ein Integritätsbereich mit endlich vielen Elementen. Man beweise, dass I dann sogar ein Körper ist.

Aufgabe 10
Es sei $\varphi : R \to S$ es Ringhomomorphismus. Es sei $I \lhd S$ ein (zweiseitiges) Ideal. Dann ist $\varphi^{-1}(I)$ ein ideal von R.

Aufgabe 11
Eine Teilmenge I eines Ringes R ist ein Ideal genau dann wenn, es einen Ring S gibt und einen Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ mit Kern I.

Aufgabe 12
R und S seien Körper; weiter sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist φ injektiv.

Aufgabe 13
R, S seien Ringe und $\varphi : R \to S$ Ringhomomorphismen. Man zeige, dass $R/\text{Kern}\varphi \cong \varphi(R)$ gilt.

Abgabe: 18.12. Die beste Lösung der folgenden Aufgabe wird mit einem Schokoladennikolaus belohnt. Abgabe: n.V.
Wir haben gesehen, dass die Gruppe A_5 die kleinste nichtabelsche einfache Gruppe ist.
Finden Sie die zweitkleinste! Zeigen Sie, dass alle kleineren Gruppenordnungen keine einfachen Gruppen liefern, (sorry, das ist etwas mühsam...) dass es zu der von Ihnen gefundenen Ordnung aber eine einfache Gruppe gibt. Gibt es zu dieser Gruppenordnung evtl. mehrere nichtisomorphe einfache Gruppen? Wie kann man diese einfache Gruppe möglichst einprägsam definieren? Hinweis: die in Frage kommende Gruppe ist nicht die A_6.