Blatt 6
18.12.2002

Algebra

WS 2002/03
Dr. Elsholtz

Aufgabe 1
(a) Man bestimme alle Ringhomomorphismen $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ und alle Ringhomomorphismen $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.
(b) Sei n eine natürliche Zahl. Man zeige, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann ein Körper ist, wenn n eine Primzahl ist.

Aufgabe 2
Sei I_1 das im Ring $\mathbb{Z}[i]$ von 2 und $i-1$ erzeugte Ideal und I_2 das von $1+3i$ und $3+7i$ erzeugte Ideal. Man zeige $I_1 = I_2$, begründe, daß es sich um ein Hauptideal handelt und finde einen Erzeuger.

Aufgabe 3
Es sei $R = 2\mathbb{Z}$ der Ring der geraden Zahlen. (Ein Ring ohne 1). Zeigen Sie, dass $M = \{4z : z \in \mathbb{Z}\}$ ein maximales Ideal ist, aber kein Primideal ist. Vergleichen Sie dies mit einem relevanten Satz der Vorlesung.

Aufgabe 4
Es sei $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ und $R = \mathbb{Z}[\rho]$. Es sei $I = [6, 2\rho]$. Man bestimme das Element $\alpha \in I$ mit der kleinsten Norm. (Für die Norm siehe auch die Vorlesung!) Ist I ein Hauptideal? Man skizziere I in der komplexen Ebene.

Aufgabe 5
Es sei $R = \mathbb{Z}[i]$.

a) Man faktorisiere $n = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$ in prime Elemente.

b) Man bestimme $a = \mathrm{ggT}(26 + 36i, -1 + 13i)$ und skizziere das von a erzeugte Ideal.

Aufgabe 6
Ein Ring R heißt einfach, wenn R außer $\{0\}$ und R keine weiteren Ideale enthält. Man zeige:
(a) Schiefkörper sind einfache Ringe.
(b) Kommutative einfache Ringe sind Körper.
(c) Ist die Voraussetzung „kommutativ“ notwendig, um in (b) wenigstens einen Schiefkörper zu erhalten?
Hinweis für (c): Man denke an Matrizenringe.

Aufgabe 7
Es seien I und J Ideale eines Ringes R, mit

$$I + J = \{i + j | i \in I \text{ und } j \in J\} = R.$$

Man zeige, daß es für alle $a, b \in R$ ein $x \in R$ gibt, so dass gilt:

$$\begin{aligned} x &\equiv a \bmod I \\ x &\equiv b \bmod J. \end{aligned}$$

Aufgabe 8
Sei R ein faktorieller Ring. Man zeige:
(a) Jedes Element $x \in R \setminus \{0\}$ ist nur in endlich vielen Hauptidealen enthalten.
(b) Jede aufsteigende Folge $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots \subseteq R$ von Hauptidealen I_i in R wird stationär, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $I_i = I_n$ für alle $i \geq n$.
Hinweis: Man überlege sich, dass in Integritätsringen Erzeuger von Hauptidealen bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig sind.

Abgabe: 8.1.2003.