Wiederholungsblatt
zur Gruppentheorie
18.12.2002

Algebra

WS 2002/03
Dr. Elsholtz

Wiederholen Sie für die Klausur:

- Alle Hausaufgaben. Aufgaben, die vor Wochen schwer waren, sind hoffentlich mit Abstand, und nachdem sie in der Übung besprochen wurden, leichter geworden...
- Ihre Vorlesungsmitschrift.
- Insbesondere vergegenwärtigen Sie sich, was Sie über kleine Gruppen wissen. Welche Gruppen mit n Elementen gibt es? (z.B. $n=$ prim, $n = 2p$, $n = pq$, $n = p^2$).
- Für Aufgaben nützlich sind natürlich die Konsequenzen der Sylowsätze. Wir haben z.B. die Gruppen bis zur Ordnung 60 auf die Frage hin untersucht, ob sie einen Normalteiler haben, oder nicht.
- Ebenfalls sind die Ringe $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ mit $d \in \mathbb{Z}$ eine Quelle interessanter Aufgaben.
- Unten stehen noch eine Reihe Aufgaben. Einige stammen von Prof. Klotz, andere habe ich aus dem Internet. In der Klausur wird nicht erwartet, dass Sie komplett neuartige Aufgaben unter Zeitdruck lösen können. Allerdings wird erwartet, dass Sie Aufgaben, die sehr ähnlich sind zu den Hausaufgaben oder zu den hier mit Lösungen versehenen Aufgaben, bearbeiten können.
- Die Klausur wird einen Anteil an Faktenwissen abfragen (Bsp. unten).

Übungs-Material:

Faktenwissen:

1. Geben Sie alle abelschen Gruppen mit 8 und 12 Elementen an. (Ohne Nachweis).
2. Es sei R ein Integritätsbereich mit 1. Setzen Sie die richtige Implikation bzw. Äquivalenz ein ($\Leftrightarrow, \Leftarrow, \Rightarrow$).

- $p \in R$ ist prim $\quad$ $p \in R$ ist irreduzibel.
- Es seien H und G endliche Gruppen. Es sei $H \leq G$ $\quad$ $|H|$ ist ein Teiler von $|G|$.

3. Es sei G eine beliebige Gruppe mit 99 Elementen. Können Sie dann bereits folgern, dass es ein Element der Ordnung $1, 9, 11, 99$ gibt? (Das sind 4 Fragen!)

4. Geben Sie zwei Beispiele für einen Ring mit unendlich vielen Elementen und ein Beispiel für einen Ring mit endlich vielen Elementen an.

5. Geben Sie eine Bedingung an, die garantiert, dass ein Integritätsbereich bereits ein Körper ist.

Aufgaben von Prof. Klotz:

1. Es sei $|G| = 99$. Man zeige, dass alle Untergruppen der Ordnung 11 Normalteiler von G sind.

2. Es seien A, B endliche Untergruppen von G. Man zeige $|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$. (vgl. Vorlesung).

3. Man zeige:
   (a) $H = \{(id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ ist eine abelsche Untergruppe der alternierenden Gruppe A_4.
   (b) A_4 hat keine Untergruppe der Ordnung 6.
   (c) H ist ein Normalteiler von A_4.

4. (a) Man zeige: $(i, j) = (1i)(1j)(1i)$ für $1 \leq i < j$
   (b) $S_n =< (1i) : 2 \leq i \leq n >$.
   (c) Man zeige, dass A_n von den Zykeln der Länge 3 erzeugt wird, (vergleiche frühere Aufgabe von uns).
   (d) Man zeige, dass A_n für $n \geq 5$ einfach ist.

5. In einer endlichen Gruppe G gelte für einen Automorphismus σ ($G \to G$, homomorph):

$$|\{g \in G : \sigma(g) = g^{-1}\}| > \frac{3}{4}|G|.$$

   Man beweise, dass bereits für alle $g \in G : \sigma(g) = g^{-1}$ gilt:

6. Es sei R ein Ring mit 1, in dem für alle $x \in R$ gilt: $x^2 = x$. Man zeige: Ist R nullteilerfrei, dann ist R isomorph zu $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

7. Es seien G_1 und G_2 Untergruppen der Gruppe G. Man zeige, dass $G_1 \cup G_2$ genau dann Untergruppe von G ist, wenn $G_1 \subseteq G_2$ oder $G_2 \subseteq G_1$ ist.

8. Man bestimme ein erzeugendes Element des von der Menge $M = \{a^5 - a : a \in \mathbb{Z}\}$ in $\mathbb{Z}$ erzeugten Hauptideals.

9. Man bestimme die Primfaktorzerlegung von $12 + 21i$ in $\mathbb{Z}[i]$.

1. **Frage:** If N is a normal subgroup of finite index in a group G, and H is a group of finite order in G, and if $|G : N|$ is relatively prime to $|H|$, then $H \subseteq N$.

   Lösung: We note that $|G : N|$ is divisible by $|HN : N| = |H : H \cap N|$. Since $|G : N|$ and $|H|$ are relatively prime, $|H : H \cap N|$, which divides both, equals 1. Hence $H \cap N = H$; that is $H \subseteq N$.

2. **Frage:** In the group $G = \mathbb{Z}_{36}^{\times}$, let $H = \{[x] | x \equiv 1 (\mod 4)\}$ and $K = \{[y] | y \equiv 1 (\mod 9)\}$. Show that H and K are subgroups of G, and find the subgroup HK.

   Hinweis: mit $[x]$ ist hier einfach das Element $x \in G$ gemeint.

   Solution: It can be shown that the given subsets are subgroups. A short computation shows that $H = \{[1], [5], [13], [17], [25], [29]\}$ and $K = \{[1], [19]\}$. Since $x \cdot [1] \neq x \cdot [19]$ for $x \in G$, the set HK must contain 12 elements. The group $G = \mathbb{Z}_{36}^{\times}$ has 12 elements since $36(1 - 1/2)(1 - 1/3) = 12$, and so $HK = G$.

3. **Frage:** Show that if p is a prime number, then the order of the general linear group $GL_n(Z_p)$ is $(p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1})$.

Solution: We need to count the number of ways in which an invertible matrix can be constructed. This is done by noting that we need n linearly independent rows. The first row can be any nonzero vector, so there are $p^n - 1$ choices.

There are p^n possibilities for the second row, but to be linearly independent of the first row, it cannot be a scalar multiple of that row. Since we have p possible scalars, we need to omit the p multiples of the first row. Therefore the total number of ways to construct a second row independent of the first is $p^n - p$.

For the third row, we need to subtract p^2, which is the number of vectors in the subspace spanned by the first two rows that we have chosen. Thus there are $p^n - p^2$ possibilities for the third row. This argument can be continued, giving the stated result. (A more formal proof could be given by induction.)

4. **Frage:** Let G be a group which has a subgroup of index 6. Prove that G has a normal subgroup whose index is a divisor of 720.

   Vgl. den Satz von Cayley.

   Solution: Suppose that H is a subgroup with index 6. Letting G act by multiplication on the left cosets of H produces a homomorphism from G into S_6. The order of the image must be a divisor of $|S_6| = 720$, and so the index of the kernel is a divisor of 720.

5. **Frage:** By direct computation, find the number of Sylow 3-subgroups and the number of Sylow 5-subgroups of the symmetric group S_5. Check that your calculations are consistent with the Sylow theorems.

   Solution:
   In S_5 there are $(5 \times 4 \times 3)/3 = 20$ three cycles. These will split up into 10 subgroups of order 3. This number is congruent to 1 mod 3, and is a divisor of $5 \times 4 \times 2$.

   There are (5!) / 5 = 24 five cycles. These will split up into 6 subgroups of order 5. This number is congruent to 1 mod 5, and is a divisor of 4 $\times 3 \times 2$.

6. **Frage:** How many elements of order 7 are there in a simple group of order 168?

Solution: First, $168 = 2^3 \times 3 \times 7$. The number of Sylow 7-subgroups must be congruent to 1 mod 7 and must be a divisor of 24. The only possibilities are 1 and 8. If there is no proper normal subgroup, then the number must be 8. The subgroups all have the identity in common, leaving $8 \times 6 = 48$ elements of order 7.

7. **Frage (nicht so leicht):** Let G be a group of order 340. Prove that G has a normal cyclic subgroup of order 85 and an abelian subgroup of order 4.

   Solution: First, $340 = 2^2 \times 5 \times 17$. There exists a Sylow 2-subgroup of order 4, and it must be abelian. No divisor $d \neq 1$ of $68 = 2^2 \times 17$ is congruent to 1 mod 5, so the Sylow 5-subgroup is normal. Similarly, the Sylow 17-subgroup is normal. These subgroups have trivial intersection, so their product is a direct product, and hence must be cyclic of order $85 = 5 \times 17$. The product of two normal subgroups is again normal, so this produces the required normal subgroup of order 85.

8. **Frage: leicht)** Show that there is no simple group of order 200.

   Solution: Since $200 = 2^3 \times 5^2$, the number of Sylow 5-subgroups is congruent to 1 mod 5 and a divisor of 8. Thus there is only one Sylow 5-subgroup, and it is a proper nontrivial normal subgroup.

9. **Frage (nicht so leicht):** If p is a prime number, find all Sylow p-subgroups of the symmetric group S_p.

   Solution: Since $|S_p| = p!$, and p is a prime number, the highest power of p that divides $|S_p|$ is p. Therefore the Sylow p-subgroups are precisely the cyclic subgroups of order p, each generated by a p-cycle. There are $(p-1)! = p!/p$ ways to construct a p-cycle $(a_1, ..., a_p)$. The subgroup generated by a given p-cycle will contain the identity and the $p-1$ powers of the cycle. Two different such subgroups intersect in the indentity, since they are of prime order, so the total number of subgroups of order p in S_p is $(p-2)! = (p-1)!/(p-1)$.

10. **Frage:** Prove that if N is a normal subgroup of G that contains a Sylow p-subgroup of G, then the number of Sylow p-subgroups of N is the same as that of G.

    Solution: Suppose that N contains the Sylow p-subgroup P. Then since N is normal it also contains all of the conjugates of P. But this means that N contains all of the Sylow p-subgroups of G, since they are all conjugate. We conclude that N and G have the same number of Sylow p-subgroups.

11. **Frage (nicht so leicht):** Prove that if G is a group of order 105, then G has a normal Sylow 5-subgroup and a normal Sylow 7-subgroup.

    Solution: The notation $n_p(G)$ will be used for the number of Sylow p-subgroups of G. Since $105 = 3 \times 5 \times 7$, we have $n_3(G) = 1$ or 7, $n_5(G) = 1$ or 21, and $n_7(G) = 1$ or 15 for the numbers of Sylow subgroups. Let P be a Sylow 5-subgroup and let Q be a Sylow 7-subgroup. At least one of these subgroups must be normal, since otherwise we would have 21×4 elements of order 5 and 15×6 elements of order 7. Therefore PQ is a subgroup, and it must be normal since its index is the smallest prime divisor of $|G|$, so we can apply the result in the previous problem. Since PQ is normal and contains a Sylow 5-subgroup, we can reduce to the number 35 when considering the number of Sylow 5-subgroups, and thus $n_5(G) = n_5(PQ) = 1$. Similarly, since PQ is normal and contains a Sylow 7-subgroup, we have $n_7(G) = n_7(PQ) = 1$.

Hinweis: Vor lauter neuen Tricks vergessen Sie bitte nicht die Standardtricks für kleine Gruppen bis zur Ornung 60...
Zum Schluss:
Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachstfest und alles Gute für das neue Jahr!