Blatt 4
26.11.2002

Algebra

WS 2002/03
Dr. Elsholtz

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass Gruppen der Ordnung 48 einen nichttrivialen Normalteiler haben.

Lösung 1:

- Die Anzahl der 2-Sylowgruppen mit 16 Elementen ist nach dem 3. Sylowsatz ein Teiler von 3, also 1 oder 3.
- Falls es nur eine 2-Sylowgruppe gibt, so ist diese nach Satz 1.10.10 Normalteiler und man ist fertig.
- Andernfalls gibt es also zwei (sogar 3) verschiedene Gruppen, P_1 und P_2. (Man kann hier NICHT folgern, dass damit bereits $3(16-1)+1$ Elemente benutzt wurden, denn der Schnitt der Gruppen ist viel größer, als bei Gruppen mit primer Gruppenordnung). Wir beachten dass wegen $P_1P_2 \subseteq G$ auch $|P_1P_2| \leq 48$.
- Wegen Satz 1.6.22 ist also
$$\frac{|P_1| \cdot |P_2|}{|P_1 \cap P_2|} = |P_1P_2| \leq 48.$$
Daher ist also $|P_1 \cap P_2| > 4$.
- Da $P_1 \cap P_2$ eine Untergruppe von P_1 ist, muss $|P_1 \cap P_2|$ ein Teiler von 16 sein. Andererseits, da P_1 und P_2 verschiedene Untergruppen sind, kommt 16 nicht als Teiler in Frage, also gilt: $|P_1 \cap P_2| = 8$, und daher $|P_1P_2| = 32$.
- Da $P_1 \cap P_2$ eine Untergruppe von P_1 ist und den Index 2 hat, gilt $P_1 \cap P_2 \lhd P_1$ und analog $P_1 \cap P_2 \lhd P_2$. Es folgt $P_1 \cap P_2 \lhd < P_1, P_2 >$. (Hierzu überlege man sich, dass jedes Element g aus $< P_1, P_2 >$ schrittweise (gemäß der Definition als Produkt von Elementen aus P_1 und P_2) von links $g(P_1 \cap P_2)$ nach rechts vertauscht werden kann: $(P_1 \cap P_2)g$.

- (Die Argumentation mit dem Normalisator $N_G(P_1 \cap P_2)$, als der grössten Untergruppe von G, die $P_1 \cap P_2$ als Untergruppe hat, ist nicht notwendig. Sie machte das Arguement vielleicht komplizierter als notwendig.) Es gilt:
$$(P_1 \cap P_2) \lhd < P_1, P_2 > \leq N_G(P_1 \cap P_2) \leq G.$$
Wir aber zeigen, dass bereits $< P_1, P_2 >= G$ gilt, so dass also
$$(P_1 \cap P_2) \lhd < P_1, P_2 >= N_G(P_1 \cap P_2) = G.$$

- Es gilt
$$P_1 P_2 \subseteq < P_1, P_2 > \leq G.$$
Da $< P_1, P_2 >$ Untergruppe von G ist, ist $| < P_1, P_2 > |$ ein Teiler von 48. Andererseits ist bereits $|P_1 P_2| = 32$. Daher muss also $< P_1, P_2 >= G$ gelten.

Lösung 2:
The number of Sylow 2-subgroups is 1 or 3. In the first case there is a normal subgroup of order 16. In the second case, let G act by conjugation on the Sylow 2-subgroups. This produces a homomorphism from G into S_3. Because of the action, the image cannot consist of just 2 elements. On the other hand, since no Sylow 2-subgroup is normal, the kernel cannot have 16 elements. The only possibility is that the homomorphism maps G onto S_3, and so the kernel is a normal subgroup of order $\frac{48}{6} = 8$.
Hinweis: onto = surjektiv
Lösung 3:
Erinnerung: Korollar 1.8.13.:
Es sei $H \leq G$ mit endlichem Index $n = |G : H|$. Dann gibt es einen Normalteiler $N \lhd G$, $N \subseteq H$ mit $n \Big| |G : N|$ und $|G : N| \Big| n!$.
Jede 2-Sylowgruppe hat Index $n = |G : H| = 3$. Wir schließen aus, dass der Normalteiler des Korollars einer der beiden trivialen Normalteiler ist: Es sei $G = N$. Dann gilt aber $n \nmid |G : H| = 1$. Es sei $N = \{e\}$. Dann gilt aber $48 = |G : N| \nmid 3! = 6$. Folglich gibt es einen nichttrivialen Normalteiler.