15. Sind die folgenden Folgen konvergent? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

    (a) $\dfrac{\sqrt{16n^2+11}}{13n+1}$,

    (b) $\dfrac{n^2}{3^n}$,

    (c) $\dfrac{3^n}{n^2}$,

    (d) $\cos(n\pi)$,

    (e) $\sin(n\pi)$,

    (f) $\dfrac{2^n}{n!}$,

    (g) $2+\dfrac{\cos n\pi}{n^5+11}$,

    (h) $\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-1)3n}$.

16. Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Folge

    $$x_n = \sqrt{n^2+21n+11}-\sqrt{n^2+20}$$

    sowie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

17. Beweisen Sie, z.B. durch Betrachtung aller möglichen Fälle: Es sei $n$ eine natürliche Zahl. Es sei $n^2$ durch 5 teilbar, dann ist auch $n$ durch 5 teilbar. (Es sind nur endlich viele Fälle zu betrachten).

    Beweisen Sie hiermit: $\sqrt{5}$ ist irrational.

18. Untersuchen Sie die durch

    $$x_0 = \frac{3}{2}, \qquad x_{n+1} = \frac{2}{3-x_n} \quad (n \geq 0)$$

    rekursiv definierte Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

19. Untersuchen Sie die durch

    $$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{7+3a_n}{3+a_n} \quad (n \geq 1)$$

    rekursiv definierte Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert. Überlegen Sie auch kurz, was passiert, wenn Sie mit $a_1 = 2$ starten?

    Hinweis: 1) Sie können (ohne Beweis) benutzen, dass für eine Folge positiver reeller Zahlen $a_n$ mit Grenzwert $a$, die Folge $\sqrt{a_n}$ den Grenzwert $\sqrt{a}$ hat.
    2) Man kann mit der binomischen Formel einen Ausdruck für $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ finden.
    3) Zeigen Sie in 18., dass die Folge durch $1 \leq x_n \leq \frac{3}{2}$ beschränkt und monoton fallend ist. Ähnlich in 19, aber schwerer.