1. Kommissar X weiß über die 4 Tatverdächtigen P, Q, R und S:
   (a) P ist genau dann schuldig, wenn Q unschuldig ist.
   (b) R ist genau dann unschuldig, wenn S schuldig ist.
   (c) Falls S Täter ist, dann auch P und umgekehrt.
   (d) Falls S schuldig ist, dann ist Q beteiligt.

   Wer ist Täter?

2. Stellen Sie die Wahrheitstafeln für folgende Ausdrücke auf.
   (a) $a \wedge \neg b$
   (b) $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$.
   (c) $a \vee \neg b$
   (d) $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$.

3. Eine Abbildung $A : X_1 \to X_2$ heißt eineindeutig, falls

$$\forall x_1, \bar{x}_1 \in X_1 : x_1 \neq \bar{x}_1 \to A(x_1) \neq A(\bar{x_1})$$

   Wie formuliert man dann die Aussage: A ist nicht eineindeutig?

4. Nehmen wir an, dass wir folgende Lemmas (Hilfssätze) bewiesen haben:

   Lemma 1. Aus A folgt C.
   Lemma 2. Wenn B nicht gilt, dann muss A gelten.
   Lemma 3. Aus B folgt C.

   Betrachten Sie folgenden Beweis der Aussage C unter Benützung dieser Lemmas:

   Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle:
   - Fall I: A gilt. Wir wenden Lemma 1 an und sind fertig.
   - Fall II: A gilt nicht. In diesem Fall unterscheiden wir zwei Unterfälle:
     - Fall IIa: B gilt nicht. Dann wenden wir Lemma 2 an und schließen daraus A, im Widerspruch zur Voraussetzung von Fall II. Daher brauchen wir diesen Fall nicht zu betrachten.
     - Fall IIb: B gilt. Mit Hilfe von Lemma 3 ergibt sich C.

   (Ende des Beweises)

   Ist dieser Beweis gültig? Analysieren Sie die logische Struktur dieses Beweises! Können Sie eine einfachere Struktur für den Beweis von C finden?

1) Bitte zur Übung anmelden! via: http://www.math.tugraz.at/AnalysisT1/vorlesung.html
2) bis Freitag morgen 08.10 Uhr die Aufgaben ankreuzen (via obigen Link oder (vermutlich)): https://www.math.tugraz.at/onlinekreuze/onlinekreuze.phtml?lv=501446w12
3) Freitags 10-11 oder 11-12 zur richtigen(!) Übung gehen.
4) Sie sollten zur Lösung der Aufgaben die Methoden der Vorlesung verwenden und Ihre Lösung an der Tafel gut erklären können.

5. Zeigen Sie für beliebige endliche Teilmengen A und B einer Menge R:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Man leite daraus eine entsprechende Formel für $|A \cup B \cup C|$ her. (Mit $|M|$ wird die Anzahl der Elemente von M bezeichnet).

6. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3}n(n^2-1).$$

7. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1} = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}.$$

Hinweis: bei einem möglichen Lösungsweg kann es helfen, $\frac{4n+2-(4(n+1)^2-1)}{(4n+2)(4(n+1)^2-1)} = \frac{-1}{4n+6}$ in einer Nebenrechnung zu verifizieren.

8. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$: $n^3 - n$ ist durch 6 teilbar.

9. (a) Finden Sie eine natürliche Zahl t für die gilt: $3^{2t} \leq t!$. Beweisen Sie für alle großen natürlichen Zahlen, z.B. für $n \geq 30$: $3^{2n} \leq n!$.
   (b) Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$: $4^n > n^4$. (Was passiert, wenn Sie versuchen, dies bereits für $n \geq 1$ zu beweisen?)

10. Beweisen Sie für die durch

$$a_0 = 3, \; a_n = 3 - \frac{2}{a_{n-1}}, \qquad n \geq 1$$

rekursiv definierte Folge $(a_1, a_2, \ldots)$ die folgende explizite Darstellung:

$$a_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

Bemerkungen:
1) Achten Sie auf eine sorgfältige Struktur der Induktion!
2) In den obigen Beispielen ist die Behauptung jeweils angegeben. Es ist eine gute Übung (aber durchaus etwas schwerer), die Behauptung erst einmal zu „finden“ wenn sie nicht angegeben ist. Dazu schaut man die ersten Fälle an, und rät oder berechnet die allgemeine Lösung.

Zum Beispiel: in Aufgabe 6) muss die Formel für $\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$ ein Polynom vom Grad drei sein. Der Koeffizient von n^3 muss ein Drittel sein. (Das kann man z.B. mit $\sum \ldots \approx \int_0^n x^2\,dx = \frac{1}{3}n^3$ sehen.) Dann kann man schrittweise für kleine Werte von $n = 0, 1, 2$ das genaue Polynom rekonstruieren. (z.B. durch ein lineares Gleichungssystem).

Oder in Aufgabe 10) rechnet man die ersten Folgenglieder aus, und rät dann, dass Terme der Form $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{15}$ entsprechend verallgemeinert werden.

Probieren Sie ruhig, durch das Berechnen der ersten Terme in Aufgaben 6,7 und 10 den richtigen Ausdruck zu raten.

11. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} = 2^n$.

    Sei A eine Menge mit n Elementen. Zeigen Sie: Die Anzahl der Paare (B, C) disjunkter Teilmengen B, C von A ist 3^n .

12. Lösen Sie folgende Ungleichungen über den reellen Zahlen.

    (a) $\frac{x-3}{1-2x} < 0$,

    (b) $3 - x^2 + 2x > 0$,

    (c) $\frac{x}{x-2} > \frac{x-3}{3x-1}$.

    Anmerkung: Es sollen tatsächlich die *Un*gleichungen direkt gelöst werden, d.h., es sollen nicht die entsprechenden Gleichungen gelöst und einzelne „Probe"-Punkte eingesetzt werden.

13. Die Menge $S = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Ring.

    (a) Beweisen Sie exemplarisch die folgenden Rechengesetze: für $s_1, s_2, s_3 \in S$, also $s_i = a_i + b_i\sqrt{2}$ (für $i = 1, 2, 3$), gilt $s_1s_2 = s_2s_1$, und $s_1(s_2 + s_3) = s_1s_2 + s_1s_3$.

    (b) Zeigen Sie, dass $s_1s_2 \in S$. Warum ist S kein Körper?

    (c) Es sei $T = \{\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, (c, d) \neq (0, 0)\}$ und $U = \{r_1 + r_2\sqrt{2} : r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie, dass $T = U$ gilt. Ist T ein Körper?

14. Beweisen Sie: $\sqrt{5}$ ist irrational.

    Hinweis: Für einen Zwischenschritt kann es helfen, durch Fallunterscheidung zu beweisen: für eine natürliche Zahl n gilt: Wenn n^2 durch 5 teilbar ist, dann ist auch n durch 5 teilbar.

Prüfungen: Die Prüfungen für T1a am 5.11. und für alle (T1 und T1a) am 30.11. werden in den nächsten Tagen zum Anmelden freigeschaltet, (tugraz-online). (Telematiker bitte für den 5.11. anmelden, die Sekretärin wird Sie dann automatisch auch für den 30.11. anmelden.)

15. Sind die folgenden Folgen konvergent? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an. Ebenso, wenn ein Grenzwert g existiert, geben Sie für alle $\varepsilon > 0$ ein N_ε and, so dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt $|a_n - g| < \varepsilon$.

    (a) $a_n = \dfrac{(n+1)(n^2-1)}{(5n-1)(4n^2+1)}$,

    (b) $b_n = \dfrac{(n+1)(n^3-1)}{(2n^2+1)(3n+1)}$.

    (c) $c_n = \dfrac{(n^2+1)(3n^2+1)}{(2n^2+3)(2n^2+1)}$.

16. Sind die folgenden Folgen konvergent? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

    (a) $\dfrac{\sqrt{16n^2+11}}{13n+1}$,

    (b) $\dfrac{n^2}{3^n}$,

    (c) $\dfrac{3^n}{n^2}$,

    (d) $\cos(n\pi)$,

    (e) $\sin(n\pi)$,

    (f) $\dfrac{2^n}{n!}$,

    (g) $2 + \dfrac{\cos n\pi}{n^5+11}$,

    (h) $\dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-1)3n}$.

17. Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Folge

$$x_n = \sqrt{n^2+21n+11} - \sqrt{n^2+20}$$

    sowie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

18. Untersuchen Sie die durch

$$x_0 = \frac{3}{2}, \qquad x_{n+1} = \frac{2}{3-x_n} \quad (n \geq 0)$$

    rekursiv definierte Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

    Hinweis: 1) Sie können (ohne Beweis) benutzen, dass für eine Folge positiver reeller Zahlen a_n mit Grenzwert a, die Folge $\sqrt{a_n}$ den Grenzwert $\sqrt{a}$ hat.
    2) Man kann mit der binomischen Formel einen Ausdruck für $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ finden.
    3) Zeigen Sie in 18., dass die Folge durch $1 \leq x_n \leq \frac{3}{2}$ beschränkt und monoton fallend ist.

    Info: am 26.10. und 2.11. finden wegen Feiertagen keine Übungen/Vorlesungen statt. Obige Aufgaben sind zum Üben gedacht, aber nicht zum Ankreuzen bezüglich des Übungspunktesystems.

    Erinnerung: bitte zur Klausur im Tug-online anmelden.

19. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+1}$

    (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{0.2}}{n^{0.6}+(-1)^n}$

    (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3+2}{5n^5+8}$

20. Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz, und bestimmen Sie (falls konvergent) ihre Summe:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$,

    (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$,

    Info: am 26.10. und 2.11. finden wegen Feiertagen keine Übungen/Vorlesungen statt. Obige Aufgaben sind zum Üben gedacht, aber nicht zum Ankreuzen bezüglich des Übungspunktesystems.

    Erinnerung: bitte zur Klausur im Tug-online anmelden.

21. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$.
    Hinweis: Schätzen Sie den Klammer-Ausdruck geeignet nach oben und unten ab, und zeigen Sie von den beiden neuen Folgen, dass sie den Grenzwert $\frac{1}{2}$ besitzen!

22. Bestimmen Sie die Häufungspunkte der nachstehenden Folgen (x_n) :

$$(a)\ x_n=\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{1}{3}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}},\quad (b)\ x_n=2[1+(-1)^n]+3(-1)^{n+1},$$

$$(c)\ x_{n+1}=(-1)^{n+1}[x_n+(-1)^n],\ x_1=1,\ n\in\mathbb{N}.$$

23. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:
    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3\,c^n}$ für $c=10$ und $c=50$.
    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}(2n)!}{(4n)!}$

24. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

    alternierend ist. Ist sie auch konvergent?

25. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, den Betrag und die konjugiert komplexe Zahl zu $(\frac{1-i}{1+i})^n,\ n\in\mathbb{Z}$.

26. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz
    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n}$
    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3i)^n}{n^4}$
    (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-3i)^n}{n!}$.

27. Lösen Sie folgende Gleichungen über den komplexen Zahlen. Geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil der Lösung an.

    (a) $z^2 - 7z + (13 + i) = 0$,

    (b) $z^2 + 3z + (6 + 2i) = 0$.

28. Bestimmen Sie:
    (a) Die Quadratwurzeln von $-i$.
    (b) Zeigen Sie, dass $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ eine sechste Wurzel aus 1 ist.

29. Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von $z \in \mathbb{C}$, sowie z^2 und $|z|^2$.
    a) $\dfrac{1+i}{1+2i}z = \dfrac{2-2i}{1-3i}$ b) $z = \dfrac{i+4}{2i-1}$ c) $z = (2-i)^2 - 7 + 3i$

30. Man skizziere die folgenden Punktmengen in der Gauß'schen Zahlenebene:

    (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \le |z-1|\}$
    (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-3i| < 7\}$
    (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - z| \le 1\}$
    (d) $\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} + z + \bar{z} < 0\}$
    (e) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| + |z+i| \le 3\}$
    (f) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\ z^2 \le 4\}$

31. Für die nachstehende Funktionen ist zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta_\epsilon > 0$ so zu bestimmen, dass aus $|x - x_0| < \delta_\epsilon$ die Beziehung $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ folgt.

$$f(x) = x^3, \quad D(f) = \mathbb{R}.$$

32. Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind:

$$(a)\quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{falls } x < 0 \text{ oder } x > 1 \\ x^2 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$

$$(b)\quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{falls } -1 \le x \le 0 \\ 1 - x & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in $[-\pi, \pi]$:

$$(c)\quad f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{falls } x \ne 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$

$$(d)\quad f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{falls } x \ne 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$

33. Es seien zwei Funktionen definiert durch $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

    (a) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe von g für alle $x \in \mathbb{C}$ konvergiert, d.h., dass die Funktion für $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert ist.

    (b) Beweisen Sie, dass $f(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$ und $g(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$ gilt.

    (c) Beweisen Sie, dass $g^2(x) - f^2(x) = 1$ gilt.

    (d) Weisen Sie $g(x + y) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$ nach.

    (e) Benutzen Sie die Potenzreihe, um $f(ix)$ durch $\sin(x)$ auszudrücken.

    (f) Finden Sie analog einen Ausdruck für $g(ix)$.

34. Es sei $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Berechnen Sie die ersten Koeffizienten der Potenzreihe der Tangensfunktion (entwickelt um $x_0 = 0$), bis zum Koeffizienten von x^7.
    Anleitung: Es sei $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Wenn die a_n und b_n bekannt sind, kann man nacheinander $c_0, c_1, \ldots$ ausrechnen.

35. Drücken Sie $\sin(5s)$ nur durch $\sin(s)$ (und Potenzen hiervon) aus.

36. Geben Sie alle komplexen Lösungen von $e^z = i$ an.

37. (a) Geben Sie alle rellen Lösungen x von $\cosh x = 2$ an.

    (b) Die komplexe Funktion $\cosh z$ ist analog zur rellen definiert, für alle $z \in \mathbb{C}$. Entweder über die Potenzreihe, oder als $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$. Geben Sie alle komplexen Lösungen z von $\cosh z = \frac{1}{2}$ an.

38. Geben Sie alle komplexen Lösungen von $z^6 + (2 - 6i)z^3 = 11 + 2i$ an. Geben Sie die Lösungen jeweils in kartesischen und in Polarkoordinaten an. (Hinweis: Lösen Sie mit $w = z^3$ zunächst eine quadratische Gleichung in w.)

Teilnehmer von Analysis T1: bitte zur Prüfung vom 30.11. anmelden (falls noch nicht geschehen). (Teilnehmer von Analysis T1a (Telematik) sollten bereits automatisch angemeldet sein).

39. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Ausdrücke:

(a) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (b) $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ (c) $\ln \dfrac{ax+b}{cx+d}$

(d) $(1+e^x)^4 \ln(x+\sin^2(\dfrac{1}{x^2}))$ (e) $2^{x^2 \cos x}$ (f) x^x (g) $(x^x)^x$ (h) x^{x^x}

40. Zeigen Sie die folgende Ungleichung:

$$(1+x)^\alpha > 1+\alpha x \ , \text{ wenn } \ x > -1, \ x \neq 0, \ \alpha > 1.$$

(Hinweis: Man betrachte die Funktion $(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$).

41. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \ \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)} \ , \quad (b) \ \lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} \ ,$$

$$(c) \ \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \ , \quad (d) \ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}.$$

Klausurinfo:
Wiederholen Sie insbesondere Blatt 1-8 (bzw. primär Blatt 4-8 für T1a): Induktion, binomischen Satz, Folgen und Reihen, Konvergenz, komplexe Zahlen, Potenzreihen an hand der Übungsbeispiele.

Updates werden im Teach Center bekannt gegeben.

Über updates zu Klausur-Räumen werden Sie ggf noch informiert.

Übung am 30.11. T1a/b: normal. (Die Übung zählt zu T1b.)
T1: gehen Sie von 10-11 in die Übung, im gleichen Raum wie sonst. Von 11-12 dort Sprechstunde.

42. Ersetzen Sie folgende Funktionen durch ihre Taylorpolynome des angegebenen Grades, und schätzen Sie den Fehler im angegebenen Bereich ab:
    a) $f(x) = \sin(x)$ durch $T_3(f, x, 0)$ in $|x| \leq 1/10$
    b) $f(x) = \arctan(x)$ durch $T_3(f, x, 0)$ in $|x| \leq 1/10$

43. Diskutieren Sie die folgenden reellen Funktionen (Skizzen!):
    (a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ (c) $f(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$
    (d) $f(x) = x \, \ln(x)$ (e) $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$ (f) $f(x) = e^{-x} \sin x, x \geq 0$

44. Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale:
    (a) $\displaystyle\int x^3 \ln x \, dx$ (b) $\displaystyle\int x^n \ln x \, dx$ allgemein, für eine natürliche Zahl n
    (c) $\displaystyle\int x^3 \sin x \, dx$ (d) $\displaystyle\int \cos^4 x \, dx$ (e) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1} \, dx$ Hinweis: $x = \sinh t$

45. Integrieren Sie:
$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx.$$

46. Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

47. Integrieren Sie:

    (a) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+x+5}{x^2-1}\,dx.$

    (b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}\,dx.$

    (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos x}.$

    (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh x}.$

48. Berechnen Sie
$$\int_0^2 x(\sqrt{x+1})^3\,dx.$$

49. Berechnen Sie
$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx.$$
Erklären Sie die geometrische Bedeutung dieses Integrals.

50. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die zwischen den Parabeln $y(x)=x^2$ und $y^2=x$ eingeschlossen ist. (Skizze!)

51. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche, welche von den zwei Kurven $y_1=x^2+\sqrt{16-x^2}$ und $y_2=x^2-\sqrt{16-x^2}$ eingeschlossen ist.

    Wer zur letzten Aufgabe eine besonders elegante Lösung hat, kann eine Kopie gerne am Freitag 14.12. in der Vorlesung abgeben, oder mir (CE) am Freitag bis 10 Uhr pdf-gescannt zumailen. (Keine Megabytes, bitte, Papierform stark bevorzugt).

52. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kettenlinie $y = a\cosh(\frac{x}{a})$, $0 \leq x \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

53. Berechnen Sie Oberfläche und Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kettenlinie $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ $(-a \leq x \leq a)$ um die x-Achse entsteht.

54. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kurve $y^2 - x^2 = 1$ $(-1 \leq x \leq 1,\ y > 0)$ um die x-Achse entsteht.

55. Berechnen Sie die Bogenlänge der Asteroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1,\ -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$. (Hinweis: wählen Sie die Parametrisierung $x(t) = (\cos t)^3$, $y(t) = (\sin t)^3$ und zeichnen Sie die Kurve.)

56. Berechnen Sie die von der der Asteroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1,\ -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$ eingeschlossene Fläche. (Hinweis: wählen Sie die Parametrisierung $x(t) = (\cos t)^3$, $y(t) = (\sin t)^3$ und zeichnen Sie die Kurve.)

57. Zeigen Sie die Konvergenz des Fresnelschen Integrals $S := \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$.

    Hinweis: Substituieren Sie $x^2 = t$. (Den Wert $S = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ werden wir in Analysis T2 mittels Integration im Komplexen berechnen.)

58. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $f(x) = 2x^{3/2} + 2$ zwischen $x = 0$ und $x = 2$.

59. Untersuchen Sie, ob folgende uneigentliche Integrale existieren, und wenn ja, geben Sie den Wert an. (Für a) -c) mit genauer Begründung, für d) zB mit einer Formelsammlung oder Computer, d.h. Begründing für Teil d) nicht erforderlich (kommt in Analysis T2...)).

$$a)\ \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx \qquad b)\ \int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx$$

$$c)\ \int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2}\,dx \qquad d)\ \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$$

Nächste Übung am 11.1.2013.

Hinweise für die Klausur am 21.1.2013:
Studierende, die an dem ersten Analysis T1 Test (30.11.) teilgenommen haben, sind automatisch angemeldet.
Analysis T1b: bitte im Tugraz-online zur Klausur anmelden.

Klausurinhalt: Differential und Integralrechnung. Also insbesondere: Ableitung, Grenzwerte mit L'Hospital, Kurvendiskussion, unbestimmte Integrale, bestimmte Integrale, mit Anwendungen auf geometrische Fragen (Bogenlänge, Fläche, Oberfläche, Volumen), uneigentliche Integrale.

Wir wünschen Ihnen Frohe Weihnachten und alles Gute für 2013!

Einige der untenstehenden Aufgaben sind alte Klausuraufgaben.

60. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert (mit Begründung):

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{\sin(3x)}{x^3}\right).$$

61. Integrieren Sie

$$\int \frac{x^2-5x+17}{x^2-10x+21}\,dx.$$

62. Integrieren Sie

$$\int \sin^4 x\,dx.$$

63. Die Cosinus-Funktion kann recht gut durch $1-\frac{x^2}{2}$ angenähert wird. Geben Sie eine (möglichst gute) obere Schranke für den maximalen Fehler von $|\cos x-(1-\frac{x^2}{2})|$ im Intervall $x\in[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}]$.

64. Es sei $D=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}$. Geben Sie für die Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^2e^{-x^2}$ an:
f', f'', alle Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, genaues Verhalten für $x\to\infty$ und $x\to 0$. Skizze. Geben Sie (mit Begründung) den genauen Wertebereich der Funktion an.

65. Geben Sie für die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=e^{\sin x}$ an:
f', f'', alle Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, genaues Verhalten für $x\to\infty$ und $x\to 0$. Skizze. Geben Sie (mit Begründung) den genauen Wertebereich der Funktion an.

Sonstiges:
Da wir einige Stunden vorgeholt haben, sind wir bereits am Ende der Vorlesung! Am Mittwoch 16.1. um 8.15-10 Uhr und 23.1. um 9-10 Uhr biete ich in i13/i12 Sprechstunde/KV an. Ich kann z.B. am Mittwoch 16.1. gerne alte Klausuraufgaben vorrechnen (andere Vorschläge willkommen).

Klausur: Raumverteilung wie beim letzten Mal.

Es wird nach diesem Übungsblatt noch eines zu Kapitel 6 des Skriptes geben.

Da Sie in der Klausur keinen Taschenrechner verwenden dürfen, wird Ihnen (wenn das sinnvoll erscheint, eine Tabelle der folgenden Art zur Verfügung gestellt (z.B. für grobe Funktionenskizzen).

Mit Mathematica (bzw. Wolframalpha) berechnete Werte der Sinusfunktion mit Schrittweite $\pi/16$.

Table[{N[x, 7], N[Sin[x], 7]}, {x, 0, 2 Pi, Pi/16}]

(Pdf auf Vorlesungs-Webseite).

66. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D und die partiellen Ableitungen erster Ordnung nach allen auftretenden Variablen im Innern B von D.

    (a) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; (b) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$;

    (c) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{\sqrt{x + 2y}}$;

67. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \frac{y}{1+x^2}$.
    a) Man berechne grad $f(x, y)$
    b) Man berechne die Richtungsableitung an der Stelle $\vec{x}_0 = (1, 2)$ in Richtung $(3, 4)$.
    c) In welche Richtungen (vom Punkt $\vec{x}_0 = (1, 2)$) ist die Steigung c1) maximal, c2) minimal, c3) gleich Null?
    d) Man bestimme die Tangentialebene an f im Punkt $\vec{x}_0 = (1, 2)$.

68. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = yx^2(4 - x - y)$.
    Man berechne die partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung und daraus die Hessematrix.

69. Man finde die Stellen lokaler Extrema der Funktion $f(x, y) = x + y$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1 = 0$.

70. Einem Kreis mit Radius R ist ein Dreieck maximaler Fläche einzuschreiben. Bestimmen Sie die Seitenlängen.

71. Welcher Punkt der Fläche $z = x^2 + y^2$ liegt dem Punkt $(1, 1, \frac{1}{2})$ am nächsten?

Sonstige Info:
Konversatorium am Mittwoch 9 Uhr.

Info von der Webseite: Im Falle einer negativen Beurteilung der Lehrveranstaltung besteht die Möglichkeit zu einem Gesamttest über die Lehrveranstaltung anzutreten. Für diesen neuen Prüfungsantritt bleiben die in der Übung erworbenen Punkte und das bisherige Punkteschema gültig. (Für spätere Antritte verfallen aber alle gesammelten Punkte).
Termin: Analysis T1 und T1b: 5.3.2013.

Viel Erfolg bei allen sonstigen Prüfungen, und schöne Ferien!!