5. Zeigen Sie für beliebige endliche Teilmengen A und B einer Menge R:
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
Man leite daraus eine entsprechende Formel für $|A \cup B \cup C|$ her. (Mit $|M|$ wird die Anzahl der Elemente von M bezeichnet).

6. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3}n(n^2-1).$$

7. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1} = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}.$$
Hinweis: bei einem möglichen Lösungsweg kann es helfen, $\frac{4n+2-(4(n+1)^2-1)}{(4n+2)(4(n+1)^2-1)} = \frac{-1}{4n+6}$ in einer Nebenrechnung zu verifizieren.

8. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$: $n^3 - n$ ist durch 6 teilbar.

9. (a) Finden Sie eine natürliche Zahl t für die gilt: $3^{2t} \leq t!$. Beweisen Sie für alle großen natürlichen Zahlen, z.B. für $n \geq 30$: $3^{2n} \leq n!$.
   (b) Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$: $4^n > n^4$. (Was passiert, wenn Sie versuchen, dies bereits für $n \geq 1$ zu beweisen?)

10. Beweisen Sie für die durch
$$a_0 = 3,\ a_n = 3 - \frac{2}{a_{n-1}}, \qquad n \geq 1$$
rekursiv definierte Folge $(a_1, a_2, \ldots)$ die folgende explizite Darstellung:
$$a_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

Bemerkungen:
1) Achten Sie auf eine sorgfältige Struktur der Induktion!
2) In den obigen Beispielen ist die Behauptung jeweils angegeben. Es ist eine gute Übung (aber durchaus etwas schwerer), die Behauptung erst einmal zu „finden“ wenn sie nicht angegeben ist. Dazu schaut man die ersten Fälle an, und rät oder berechnet die allgemeine Lösung.

Zum Beispiel: in Aufgabe 6) muss die Formel für $\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$ ein Polynom vom Grad drei sein. Der Koeffizient von n^3 muss ein Drittel sein. (Das kann man z.B. mit $\sum \ldots \approx \int_0^n x^2\,dx = \frac{1}{3}n^3$ sehen.) Dann kann man schrittweise für kleine Werte von $n = 0, 1, 2$ das genaue Polynom rekonstruieren. (z.B. durch ein lineares Gleichungssystem).

Oder in Aufgabe 10) rechnet man die ersten Folgenglieder aus, und rät dann, dass Terme der Form $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{15}$ entsprechend verallgemeinert werden.

Probieren Sie ruhig, durch das Berechnen der ersten Terme in Aufgaben 6,7 und 10 den richtigen Ausdruck zu raten.