

1. Test Analysis T1a, 5.11.2012, A

Name, Vorname	Matr.nummer	Fachrichtung

Aufgabe	1	2	3	4	\sum	A
Max. Punkte	7	3	5	5	20	
bearbeitet ? bitte ankreuzen!						
erreichte Punkte						

BEGINNEN SIE ALLE AUFGABEN AUF JEWEILS EINEM NEUEN BLATT UND SCHREIBEN SIE AUF JEDES BLATT IHREN NAMEN UND MATRIKELNUMMER!!!

1) 7 Punkte Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gilt:

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k^2 - 3k + 2} = 1 - \frac{1}{n-1}.$$

2) 3 Punkte Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad \forall x_0 \in D : (|x - x_0| < \delta) \rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Formulieren Sie mit Quantoren: Die Funktion f ist *nicht* gleichmäßig stetig.

3) 3+2 Punkte (a) Es sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Berechnen Sie

$$f(n) := \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$. Berechnen Sie dann $f(n)$ allgemein für eine beliebige natürliche Zahl n .

(b) Wenn man $(x+y+z)^5$ ausmultipliziert, ergibt sich eine Formel der Form $(x+y+z)^5 = \sum_{i,j,k} c_{i,j,k} x^i y^j z^k$ mit Koeffizienten $c_{i,j,k} \in \mathbb{Z}$. (Das Symbol $\sum_{i,j,k}$ bedeutet hier, dass über geeignete Kombinationen von i, j und k summiert wird).

Geben Sie $c_{5,0,0}$, $c_{1,1,3}$ und $c_{3,3,3}$ an.

4) 1+2+2 Punkte Auf der Menge $S = \{a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ ist eine Addition (+) und eine Multiplikation (·) definiert, die identisch ist zu der Addition und Multiplikation der reellen Zahlen.

a) Für welches Element $e \in S$ gilt $\forall s \in S : e \cdot s = s \cdot e = s$?

b) Geben Sie alle Elemente $s \in S$ an, für die es ein multiplikatives inverses Element in S gibt. (Mit Begründung!)

c) Was ändert sich bezüglich Fragen a) und b), wenn man statt der Menge S die Menge $T = \{a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ betrachtet?

Es wird nicht nur das Ergebnis, sondern insbesondere auch der Rechenweg bewertet. Begründen Sie Ihre Schritte ausreichend. Wenn Sie bei einer Aufgabe nicht weiterkommen, z.B. weil bereits ein Rechenfehler vorliegt, beschreiben Sie bitte möglichst genau das prinzipielle Vorgehen, mit dem Sie die Aufgabe angehen wollten.

Es sind *keine* elektronischen Hilfsmittel erlaubt.

Viel Erfolg!