1. Stellen Sie die Wahrheitstafeln für folgende Ausdrücke auf.
   (a) $a \wedge \neg b$
   (b) $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$.
   (c) $a \vee \neg b$
   (d) $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$.

2. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, falls gilt:
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ gilt: } |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$
   Formulieren Sie die Aussage: f ist an der Stelle x_0 unstetig.

3. Stellen Sie fest, ob die angegebenen Bedingungen notwendig und/oder hinreichend sind:
   (a) Wenn es regnet, wird die Straße nass.
   (b) Endet eine ganze Zahl auf 5 oder 0, so ist sie durch 5 teilbar.
   (c) Ergibt die Neunerprobe ein richtiges Resultat, so ist die Rechnung richtig.
   (d) Ist n eine gerade Quadratzahl, so ist n durch 4 teilbar.
   (e) Ist $x > 0$, so ist auch $x^2 > 0$.

4. Zeigen Sie für beliebige Teilmengen A, B, C einer Menge R:
$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$$

5. Mayer, Schmied und Weber sind Pilot, Kopilot und Steward einer AUA-Maschine, allerdings nicht unbedingt in der genannten Reihenfolge. Im Flugzeug befinden sich drei Reisende mit denselben drei Nachnamen. Um sie von der Besatzung zu unterscheiden, erhalten sie im folgenden ein „Herr“ vor ihre Namen. Wir wissen:
   (a) Herr Weber wohnt in Graz.
   (b) Der Kopilot wohnt in Klagenfurt.
   (c) Herr Schmied hat bereits vor langer Zeit seine Schulkenntnisse der Mathematik vergessen.
   (d) Der Fluggast, der denselben Nachnamen wie der Kopilot hat, lebt in Wien.
   (e) Der Kopilot und einer der Passagiere, ein Mathematik-Professor, wohnen im gleichen Ort.
   (f) Mayer besiegte den Steward beim Pokern.

   Folgern Sie logisch daraus, wie der Pilot heißt!

0) 1. Übung am 10.Oktober
1) Bitte rechtzeitig zum Übungs Kreuze System anmelden! via:
http://www.math.tugraz.at/~elsholtz/WWW/lectures/ws14/analysisT1/vorlesung.html
2) Im System bis Freitag morgen 08.10 Uhr die Aufgaben ankreuzen
3) Freitags 10-11 oder 11-12 zur richtigen(!) Übung gehen.
4) Sie sollten zur Lösung der Aufgaben die Methoden der Vorlesung verwenden und Ihre Lösung an der Tafel gut erklären können.

6. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3}n(n^2-1).$$

7. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

8. (a) Finden Sie eine natürliche Zahl t für die gilt: $2^{2t} \leq t!$. Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq t$: $2^{2n} \leq n!$.
   (b) Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$: $3^n > n^3$. (Was passiert, wenn Sie versuchen, dies bereits für $n \geq 1$ zu beweisen?)

9. Beweisen Sie für die durch
$$a_0 = 3,\ a_n = 3 - \frac{2}{a_{n-1}}, \qquad n \geq 1$$
rekursiv definierte Folge $(a_1, a_2, \ldots)$ die folgende explizite Darstellung:
$$a_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

10. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:
   (a) $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} = 2^n$
   (b) $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} = 0$
   (c) $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} l \binom{n}{l} = n2^{n-1}$

11. Die Menge $S = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Ring.
   (a) Beweisen Sie exemplarisch die folgenden Rechengesetze: für $s_1, s_2, s_3 \in S$, also $s_i = a_i + b_i\sqrt{2}$ (für $i = 1, 2, 3$), gilt $s_1 s_2 = s_2 s_1$, und $s_1(s_2 + s_3) = s_1 s_2 + s_1 s_3$.
   (b) Zeigen Sie, dass $s_1 s_2 \in S$. Warum ist S kein Körper?
   (c) Es sei $T = \{\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, (c, d) \neq (0, 0)\}$ und $U = \{r_1 + r_2\sqrt{2} : r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie, dass $T = U$ gilt. Ist T ein Körper?

12. Lösen Sie folgende Ungleichungen über den reellen Zahlen.

    (a) $\frac{x-3}{1-2x} < 0$,

    (b) $3 - x^2 + 2x > 0$,

    (c) $\frac{x}{x-2} > \frac{x-3}{3x-1}$.

    Anmerkung: Es sollen tatsächlich die *Un*gleichungen direkt gelöst werden, d.h., es sollen nicht die entsprechenden Gleichungen gelöst und einzelne „Probe"-Punkte eingesetzt werden.

13. Beweisen Sie: $\sqrt{6}$ ist irrational.

    Hinweis: Für einen Zwischenschritt kann es helfen, durch Fallunterscheidung zu beweisen: für eine natürliche Zahl n gilt: Wenn n^2 durch 6 teilbar ist, dann ist auch n durch 6 teilbar.

14. Beweisen Sie: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ist irrational.

15. Untersuchen Sie die Folgen

$$(a)\ \left(\frac{(n+1)(n^2-1)}{(2n+1)(3n^2+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (b)\ \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

$$(c)\ \left(\frac{1}{n^2} + (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (d)\ \left(\frac{4^n+1}{5^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

    auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

16. Sind die folgenden Folgen konvergent? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

    (a) $\cos(n\pi)$,

    (b) $\dfrac{2^n}{n!}$,

    (c) $\dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-1)3n}$.

17. Untersuchen Sie die durch

$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{7+3a_n}{3+a_n} \quad (n \geq 1)$$

    rekursiv definierte Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert. Überlegen Sie auch kurz, was passiert, wenn Sie mit $a_1 = 2$ starten?

Hinweise:

1) Bei 14) können Sie das Ergebnis von 13) voraussetzen.

2) Übungen ankreuzen impliziert *zwingend*, dass Sie in der Übung anwesend sind!!! (Falls krank, ggf. Ersatzkreuze).

3) **Prüfungen:** Für die Prüfung T1a (Telematiker!) am 7.11. bitte im tugonline anmelden. (Die Prüfung beginnt um 16.15 und dauert, voraussichtlich, ca. 90 Minuten.)

18. Untersuchen Sie die durch
$$x_0 = \frac{3}{2}, \qquad x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n} \quad (n \geq 0)$$
rekursiv definierte Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

19. Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Folge
$$x_n = \sqrt{n^2 + 11n + 21} - \sqrt{n^2 + 6}$$
sowie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

20. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:
    (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+1}$
    (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{0.2}}{n^{0.6} + (-1)^n}$
    (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3+2}{5n^5+8}$

21. Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz, und bestimmen Sie (falls konvergent) ihre Summe:
    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$,
    (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$,

22. Zeigen Sie, dass die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$
alternierend ist. Ist sie auch konvergent?

Für die Prüfung T1a (Telematiker!) am 7.11. bitte im tugonline anmelden. (Die Prüfung beginnt um 16.15 und dauert, voraussichtlich, ca. 90 Minuten.)
Prüfungsstoff: Insbesondere die ersten vier Übungsblätter.

23. (a) Bestimmen Sie die Quadratwurzeln von $-i$.
(b) Zeigen Sie, dass $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ eine sechste Wurzel aus 1 ist, d.h. dass $z^6 = 1$ gilt.

24. Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von $z \in \mathbb{C}$, sowie z^2 und $|z|^2$.
a) $\dfrac{1+i}{1+2i}z = \dfrac{2-2i}{1-3i}$ b) $z = \dfrac{i+4}{2i-1}$ c) $z = (2-i)^2 - 7 + 3i$

25. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:
(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{5}\right)^n$
(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n(n!)}{(2n)!}$

26. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz
(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$
(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n+1}}$
(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}$

27. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz
(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n}$
(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{n^3}$
(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4-3i)^n}{n!}$.

28. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2 + 7$. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Geben Sie gegebenenfalls eine möglichst große Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ an, sodass $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv ist. Geben Sie weiters gegebenenfalls eine möglichst große Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ an, sodass $f : \mathbb{R} \to B$ surjektiv ist.

Für die Prüfung T1a (Telematiker!) am 7.11. bitte im tugonline anmelden. (Die Prüfung beginnt um 16.15 und dauert, voraussichtlich, ca. 90 Minuten.)
Prüfungsstoff: Insbesondere die ersten vier Übungsblätter.

Für die Teilnehmer der Analysis T1 (also nicht T1a!): bitte im tugonline zur Prüfung am 24.11. anmelden. (Die Telematiker haben am 24.11. auch eine Prüfung, brauchen sich für die Klausur am 24.11. aber nicht anmelden, weil wir dann alle Teilnehmer der Klausur vom 7.11. 'kopieren'.) Aufgrund der großen Gesamtteilnehmerzahl kann erst kurz vorher bekanntgegeben werden, wer in welchem Raum schreibt.
Hinweis: Die Klausur vom 24.11. ab 18 Uhr, die Klausur am 09.01.15., ab 17.15 Uhr.

29. Man skizziere die folgenden Punktmengen in der Gauß'schen Zahlenebene:
    (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \leq |z-1|\}$
    (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-3i| < 7\}$
    (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - z| \leq 1\}$
    (d) $\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} + z + \bar{z} < 0\}$
    (e) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| + |z+i| \leq 3\}$
    (f) $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z^2 \leq 4\}$

30. Für die nachstehende Funktionen ist zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta_\epsilon > 0$ so zu bestimmen, dass aus $|x - x_0| < \delta_\epsilon$ die Beziehung $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ folgt.
$$f(x) = x^3, \quad D(f) = \mathbb{R}.$$

31. Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind:
$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{falls } x < 0 \text{ oder } x > 1 \\ x^2 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$
$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{falls} -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in $[-\pi, \pi]$:
$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$
$$(d) \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$

32. Es seien zwei Funktionen definiert durch $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
    (a) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe von g für alle $x \in \mathbb{C}$ konvergiert, d.h., dass die Funktion für $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert ist.
    (b) Beweisen Sie, dass $f(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$ und $g(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$ gilt.
    (c) Beweisen Sie, dass $g^2(x) - f^2(x) = 1$ gilt.
    (d) Weisen Sie $g(x+y) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$ nach.
    (e) Benutzen Sie die Potenzreihe, um $f(ix)$ durch $\sin(x)$ auszudrücken.
    (f) Finden Sie analog einen Ausdruck für $g(ix)$.

33. Es sei $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Berechnen Sie die ersten Koeffizienten der Potenzreihe der Tangensfunktion (entwickelt um $x_0 = 0$), bis zum Koeffizienten von x^7.
Anleitung: Es sei $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Wenn die a_n und b_n bekannt sind, kann man nacheinander $c_0, c_1, \ldots$ ausrechnen.

34. Drücken Sie $\sin(5s)$ nur durch $\sin(s)$ (und Potenzen hiervon) aus.

Erinnerung: bitte zur T1-Klausur im Tug-online anmelden. (Für T1a machen wir dies direkt).

35. Geben Sie alle komplexen Lösungen von $e^z = i$ an.

36. (a) Geben Sie alle rellen Lösungen x von $\cosh x = 2$ an.
    (b) Die komplexe Funktion $\cosh z$ ist analog zur rellen definiert, für alle $z \in \mathbb{C}$. Entweder über die Potenzreihe, oder als $\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$. Geben Sie alle komplexen Lösungen z von $\cosh z = \frac{1}{2}$ an.

37. Geben Sie alle komplexen Lösungen von $z^6 + (2-6i)z^3 = 11 + 2i$ an. Geben Sie die Lösungen jeweils in kartesischen und in Polarkoordinaten an. (Hinweis: Lösen Sie mit $w = z^3$ zunächst eine quadratische Gleichung in w.)

38. Beweisen Sie: Ist $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \xi$. Der Punkt ξ heißt *Fixpunkt* der Funktion f. (Hinweis: betrachten Sie die Funktion $g(x) = f(x) - x$)

Erinnerung: bitte zur T1-Klausur im Tug-online anmelden. (Für T1a haben wir dies gemacht).
Genaue Raumeinteilung erfolgt noch.

Prüfungsstoff für T1: insbesondere die Übungsblätter 1-7
für T1a insbesondere die Übungsblätter 4-7

Es sind keine elektronischen Hilfsmittel, also auch keine Taschenrechner, erlaubt.

39. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Ausdrücke:
(a) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (b) $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ (c) $\ln \dfrac{ax+b}{cx+d}$
(d) $(1+e^x)^4 \ln(x + \sin^2(\dfrac{1}{x^2}))$ (e) $2^{x^2 \cos x}$ (f) x^x (g) $(x^x)^x$ (h) x^{x^x}

40. Bestimmen Sie die rechts- und linksseitigen Ableitungen von $f(x) = x\,|x| + 1$ in $x = 0$.

41. Zeigen Sie, dass $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ für $x \in (0, \infty)$ streng monoton wachsend ist.

42. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x(1-\cos x)}\ , \quad (b)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}\ ,$$

$$(c)\ \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}\ , \quad (d)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}.$$

43. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert (mit Begründung):

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{\sin(3x)}{x^3} \right).$$

aktualisierte Version vom 24.11.

44. Ersetzen Sie folgende Funktionen durch ihre Taylorpolynome des angegebenen Grades, und schätzen Sie den Fehler im angegebenen Bereich ab:
a) $f(x) = \sin(x)$ durch $T_3(f, x, 0)$ in $|x| \leq 1/10$
b) $f(x) = \arctan(x)$ durch $T_3(f, x, 0)$ in $|x| \leq 1/10$

45. Diskutieren Sie die folgenden reellen Funktionen (Skizzen!):
(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ (c) $f(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$
(d) $f(x) = x\,\ln(x)$ (e) $f(x) = (x^2-1)e^{-x}$ (f) $f(x) = e^{-x}\sin x, x \geq 0$

46. Geben Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{\sin x}$ an:
f', f'', alle Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, genaues Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to 0$. Skizze. Geben Sie (mit Begründung) den genauen Wertebereich der Funktion an.

47. Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale:
(a) $\displaystyle\int x^3 \ln x\, dx$ (b) $\displaystyle\int x^n \ln x\, dx$ allgemein, für eine natürliche Zahl n
(c) $\displaystyle\int x^3 \sin x\, dx$ (d) $\displaystyle\int \cos^4 x\, dx$ (e) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\, dx$ Hinweis: $x = \sinh t$

48. Integrieren Sie:

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx.$$

49. Berechnen Sie $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

50. Integrieren Sie:

    (a) $\int \frac{x^3-2x^2+x+5}{x^2-1}\,dx$.

    (b) $\int \frac{2x+1}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}\,dx$.

    (c) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$.

    (d) $\int \frac{dx}{\sinh x}$.

51. Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

    (a) $\int \frac{x^4+x^2+1}{x^3-1}\,dx$

    (b) $\int \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}\,dx$

    (c) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$ (Hinweis: $t = x^2+2x+2$)

    (d) $\int \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx$

    (e) $\int \frac{x^3-3x^2+2x+7}{x^2-x-6}\,dx$

    (f) $\int \frac{x^3+5x^2-7x+6}{(x+1)(x^2+2x+2)}\,dx$

52. Integrieren Sie: $\int \frac{35-22x+3x^2}{-18+21x-8x^2+x^3}\,dx$.

53. Berechnen Sie
$$\int_0^2 x(\sqrt{x+1})^3\,dx.$$

54. Berechnen Sie
$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx.$$
Erklären Sie die geometrische Bedeutung dieses Integrals.

Prüfungstermine: T1/T1b: 9.1.2015, ab 17.15 Uhr.

Telematiker bitte für die T1b Prüfung am 9.1.2015 anmelden. (Für die T1-Prüfung haben wir die Anmeldungen vom 24.11. kopiert).

T1a: ein weiterer Prüfungsantritt ist am 19.1. 2015 möglich.
T1 und T1b: ein weiterer Prüfungsantritt ist am 2.3. 2015 möglich.
(Details siehe Webseite)

55. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die zwischen den Parabeln $y(x) = x^2$ und $y^2 = x$ eingeschlossen ist. (Skizze!)

56. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche, welche von den zwei Kurven $y_1 = x^2 + \sqrt{16 - x^2}$ und $y_2 = x^2 - \sqrt{16 - x^2}$ eingeschlossen ist.

    Zu dieser Aufgabe gibt es mehrere Lösungen, z.B. ein längere Rechnung, oder eine kurze elegante Lösung...

57. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kettenlinie $y = a\cosh(\frac{x}{a})$, $0 \le x \le b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

58. Berechnen Sie Oberfläche und Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kettenlinie $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ $(-a \le x \le a)$ um die x-Achse entsteht.

59. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kurve $y^2 - x^2 = 1$ $(-1 \le x \le 1,\ y > 0)$ um die x-Achse entsteht.

60. Berechnen Sie die Bogenlänge der Asteroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, $-1 \le x \le 1$, $\quad -1 \le y \le 1$. (Hinweis: wählen Sie die Parametrisierung $x(t) = (\cos t)^3$, $y(t) = (\sin t)^3$ und zeichnen Sie die Kurve.)

61. Berechnen Sie die von der Asteroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, $-1 \le x \le 1$, $\quad -1 \le y \le 1$ eingeschlossene Fläche. (Hinweis: wählen Sie die Parametrisierung $x(t) = (\cos t)^3$, $y(t) = (\sin t)^3$ und zeichnen Sie die Kurve.)

62. Zeigen Sie die Konvergenz des Fresnelschen Integrals $S := \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$.

    Hinweis: Substituieren Sie $x^2 = t$. (Den Wert $S = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ werden wir in Analysis T2 mittels Integration im Komplexen berechnen.)

63. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $f(x) = 2x^{3/2} + 2$ zwischen $x = 0$ und $x = 2$.

64. Untersuchen Sie, ob folgende uneigentliche Integrale existieren, und wenn ja, geben Sie den Wert an. (Für a) -c) mit genauer Begründung, für d) zB mit einer Formelsammlung oder Computer, d.h. Begründing für Teil d) nicht erforderlich (kommt in Analysis T2...)).

$$a)\ \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx \qquad b)\ \int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx$$

$$c)\ \int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2}\,dx \qquad d)\ \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$$

65. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D und die partiellen Ableitungen erster Ordnung nach allen auftretenden Variablen im Innern B von D.

(a) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; (b) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{\sqrt{x+2y}}$;

66. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$.
a) Man berechne grad $f(x,y)$
b) Man berechne die Richtungsableitung an der Stelle $\vec{x}_0 = (1,2)$ in Richtung $(3,4)$.
c) In welche Richtungen (vom Punkt $\vec{x}_0 = (1,2)$) ist die Steigung c1) maximal, c2) minimal, c3) gleich Null?
d) Man bestimme die Tangentialebene an f im Punkt $\vec{x}_0 = (1,2)$.

67. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = 4 \ln \frac{x^2}{x^2+y^2}$ für $x, y > 0$.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen f_x und f_y von f.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten von f im Punkt $x^0 = (1,1)$.

(c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $x^0 = (1,1)$ in Richtung $\vec{e} = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

(d) Bestimmen Sie im Punkt $(x^0, f(x^0)) = (1,1,f(1,1))$ die Tangentialebene (in Hesseform) an die durch $z = f(x,y)$ mit $x, y > 0$ erklärte Fläche.

68. Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $f(x,y,z) = x^3yz^2 + e^{2x}$ in Richtung des Vektors $\vec{a} = (1,1,1)$ im Punkt $P = (0,3,2)$. Weiters bestimme man die Richtung der maximalen Änderung von f in P.

Wie bekannt, finden am 9.1.2015 ab 17.15 Uhr T1/T1b Klausuren statt. Raumaufteilung wie bei letzten Mal (24.11). **Räume für Analysis T1**:
Nachname: A-Muik: Hörsaal P1 (Petersgasse 16)
Nachname: Müller-Schlacher: Hörsaal G (Kopernikusgasse 24)
Nachname: Schlamberger-Weber Hörsaal i7 (Inffeldgasse 25D)
Nachname: Wechtitsch-Z Hörsaal i13 (Inffeldgasse 16b)

Analysis T1b: bitte im Tugraz-online zur Klausur anmelden.
Klausur am 9.1.2015, ab 17.15 Uhr im Hörsaal i13 (Inffeldgasse 16b)

Klausurinhalt: Differential und Integralrechnung. Also insbesondere: Ableitung, Grenzwerte mit L'Hospital, Kurvendiskussion, unbestimmte Integrale (mit den üblichen Verfahren wie partielle Integration, Substitution, Partialbruchzerlegung), bestimmte Integrale, mit Anwendungen auf geometrische Fragen (Bogenlänge, Fläche, Oberfläche, Volumen), uneigentliche Integrale, partielle Ableitungen, Richtungsableitungen, Tangentialebene.

Wir wünschen Ihnen Frohe Weihnachten und alles Gute für 2015!

69. Man finde die Stellen lokaler Extrema der Funktion $f(x,y) = x + y$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1 = 0$.

70. Einem Kreis mit Radius R ist ein Dreieck maximaler Fläche einzuschreiben. Bestimmen Sie die Seitenlängen.

71. Welcher Punkt der Fläche $z = x^2 + y^2$ liegt dem Punkt $(1, 1, \frac{1}{2})$ am nächsten?

72. Es sei $0 \leq x \leq 100, \quad 0 \leq y \leq 100, \quad 0 \leq z \leq 100$. Finden Sie den Quader mit Seitenlängen x, y, z, mit maximalem Volumen, wenn die Oberfläche $2(xy+xz+yz) = 96$ konstant ist.

    (Korrigierte Version vom 13.1.2015, vorher Tippfehler bei Oberfläche).

Sonstige Info:
Keine Vorlesungstermine mehr. Konversatorium am Mittwoch 14.1., 9 Uhr.

Info von der Webseite:
Weitere Klausurtermine (wobei die Klausur dann die bisherigen Klausuren ersetzt: d.h. bei T1 wird die Gesamt-Klausur dann bis zu 40 Punkte bringen, Hausübungen zählen noch zum Punkteschema.)

Analysis T1a: 19.1.2015.
Analysis T1 und T1b: Voraussichtlich 3.3.2015. (Achtung 3.3.!)

Viel Erfolg bei allen sonstigen Prüfungen, und schöne Ferien!!