6. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3}n(n^2-1).$$

7. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

8. (a) Finden Sie eine natürliche Zahl t für die gilt: $2^{2t} \leq t!$. Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq t$: $2^{2n} \leq n!$.
   (b) Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$: $3^n > n^3$. (Was passiert, wenn Sie versuchen, dies bereits für $n \geq 1$ zu beweisen?)

9. Beweisen Sie für die durch
$$a_0 = 3,\ a_n = 3 - \frac{2}{a_{n-1}}, \qquad n \geq 1$$
rekursiv definierte Folge $(a_1, a_2, \ldots)$ die folgende explizite Darstellung:
$$a_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

10. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:
   (a) $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} = 2^n$
   (b) $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} = 0$
   (c) $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} l \binom{n}{l} = n2^{n-1}$

11. Die Menge $S = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Ring.
   (a) Beweisen Sie exemplarisch die folgenden Rechengesetze: für $s_1, s_2, s_3 \in S$, also $s_i = a_i + b_i\sqrt{2}$ (für $i = 1, 2, 3$), gilt $s_1 s_2 = s_2 s_1$, und $s_1(s_2 + s_3) = s_1 s_2 + s_1 s_3$.
   (b) Zeigen Sie, dass $s_1 s_2 \in S$. Warum ist S kein Körper?
   (c) Es sei $T = \{\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, (c, d) \neq (0, 0)\}$ und $U = \{r_1 + r_2\sqrt{2} : r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie, dass $T = U$ gilt. Ist T ein Körper?