55. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die zwischen den Parabeln $y(x) = x^2$ und $y^2 = x$ eingeschlossen ist. (Skizze!)

56. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche, welche von den zwei Kurven $y_1 = x^2 + \sqrt{16 - x^2}$ und $y_2 = x^2 - \sqrt{16 - x^2}$ eingeschlossen ist.

    Zu dieser Aufgabe gibt es mehrere Lösungen, z.B. ein längere Rechnung, oder eine kurze elegante Lösung...

57. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kettenlinie $y = a\cosh(\frac{x}{a})$, $0 \le x \le b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

58. Berechnen Sie Oberfläche und Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kettenlinie $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ $(-a \le x \le a)$ um die x-Achse entsteht.

59. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kurve $y^2 - x^2 = 1$ $(-1 \le x \le 1,\ y > 0)$ um die x-Achse entsteht.

60. Berechnen Sie die Bogenlänge der Asteroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, $-1 \le x \le 1$, $\quad -1 \le y \le 1$. (Hinweis: wählen Sie die Parametrisierung $x(t) = (\cos t)^3$, $y(t) = (\sin t)^3$ und zeichnen Sie die Kurve.)

61. Berechnen Sie die von der Asteroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, $-1 \le x \le 1$, $\quad -1 \le y \le 1$ eingeschlossene Fläche. (Hinweis: wählen Sie die Parametrisierung $x(t) = (\cos t)^3$, $y(t) = (\sin t)^3$ und zeichnen Sie die Kurve.)

62. Zeigen Sie die Konvergenz des Fresnelschen Integrals $S := \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$.

    Hinweis: Substituieren Sie $x^2 = t$. (Den Wert $S = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ werden wir in Analysis T2 mittels Integration im Komplexen berechnen.)

63. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $f(x) = 2x^{3/2} + 2$ zwischen $x = 0$ und $x = 2$.

64. Untersuchen Sie, ob folgende uneigentliche Integrale existieren, und wenn ja, geben Sie den Wert an. (Für a) -c) mit genauer Begründung, für d) zB mit einer Formelsammlung oder Computer, d.h. Begründing für Teil d) nicht erforderlich (kommt in Analysis T2...)).

$$a)\ \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx \qquad b)\ \int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx$$

$$c)\ \int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2}\,dx \qquad d)\ \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$$