1. Stellen Sie die Wahrheitstafeln für folgende Ausdrücke auf.
   (a) $a \wedge \neg b$
   (b) $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$.
   (c) $a \vee \neg b$
   (d) $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$.

2. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, falls gilt:
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ gilt: } |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$
   Formulieren Sie die Aussage: f ist an der Stelle x_0 unstetig.

3. Stellen Sie fest, ob die angegebenen Bedingungen notwendig und/oder hinreichend sind:
   (a) Wenn es regnet, wird die Straße nass.
   (b) Endet eine ganze Zahl auf 5 oder 0, so ist sie durch 5 teilbar.
   (c) Ergibt die Neunerprobe ein richtiges Resultat, so ist die Rechnung richtig.
   (d) Ist n eine gerade Quadratzahl, so ist n durch 4 teilbar.
   (e) Ist $x > 0$, so ist auch $x^2 > 0$.

4. Zeigen Sie für beliebige Teilmengen A, B, C einer Menge R:
$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$$

5. Mayer, Schmied und Weber sind Pilot, Kopilot und Steward einer AUA-Maschine, allerdings nicht unbedingt in der genannten Reihenfolge. Im Flugzeug befinden sich drei Reisende mit denselben drei Nachnamen. Um sie von der Besatzung zu unterscheiden, erhalten sie im folgenden ein „Herr“ vor ihre Namen. Wir wissen:
   (a) Herr Weber wohnt in Graz.
   (b) Der Kopilot wohnt in Klagenfurt.
   (c) Herr Schmied hat bereits vor langer Zeit seine Schulkenntnisse der Mathematik vergessen.
   (d) Der Fluggast, der denselben Nachnamen wie der Kopilot hat, lebt in Wien.
   (e) Der Kopilot und einer der Passagiere, ein Mathematik-Professor, wohnen im gleichen Ort.
   (f) Mayer besiegte den Steward beim Pokern.

   Folgern Sie logisch daraus, wie der Pilot heißt!

0) 1. Übung am 7.Oktober
1) Bitte rechtzeitig zum Übungs Kreuze System anmelden! via:
http://www.math.tugraz.at/∼elsholtz/WWW/lectures/ws16/analysisT1/vorlesung.html
2) Im System bis Freitag morgen 08.10 Uhr die Aufgaben ankreuzen
3) Freitags 10-11 oder 11-12 zur richtigen(!) Übung gehen.
4) Sie sollten zur Lösung der Aufgaben die Methoden der Vorlesung verwenden und Ihre Lösung an der Tafel gut erklären können.

6. Zeigen Sie für beliebige Teilmengen A, B, C einer Menge R:

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$$

7. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3} n(n^2 - 1).$$

8. (Klausuraufgabe 2012): Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt:

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k^2 - 5k + 6} = 1 - \frac{1}{n-2}.$$

9. (a) Finden Sie eine natürliche Zahl t für die gilt: $2^{2t} \leq t!$. Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq t$: $2^{2n} \leq n!$.
   (b) Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$: $3^n > n^3$. (Was passiert, wenn Sie versuchen, dies bereits für $n \geq 1$ zu beweisen?)

10. Beweisen Sie für die durch

$$a_0 = 3, \; a_n = 3 - \frac{2}{a_{n-1}}, \qquad n \geq 1$$

rekursiv definierte Folge $(a_1, a_2, \ldots)$ die folgende explizite Darstellung:

$$a_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1} - 1}.$$

11. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} = 2^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} = 0$

   (c) $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} l \binom{n}{l} = n2^{n-1}$

Info: Vorläufige Klausurtermine stehen auf der Vorlesungswebseite.
`https://www.math.tugraz.at/~elsholtz/WWW/lectures/ws16/analysisT1/vorlesung.html`

12. Die Menge $S = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Ring.

    (a) Beweisen Sie exemplarisch die folgenden Rechengesetze: für $s_1, s_2, s_3 \in S$, also $s_i = a_i + b_i\sqrt{2}$ (für $i = 1, 2, 3$), gilt $s_1 s_2 = s_2 s_1$, und $s_1(s_2 + s_3) = s_1 s_2 + s_1 s_3$.

    (b) Zeigen Sie, dass $s_1 s_2 \in S$. Warum ist S kein Körper?

    (c) Es sei $T = \{\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, (c, d) \neq (0, 0)\}$ und $U = \{r_1 + r_2\sqrt{2} : r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie, dass $T = U$ gilt. Ist T ein Körper?

13. Lösen Sie folgende Ungleichungen über den reellen Zahlen.

    (a) $\frac{x-3}{1-2x} < 0$,

    (b) $3 - x^2 + 2x > 0$,

    (c) $\frac{x}{x-2} > \frac{x-3}{3x-1}$.

    Anmerkung: Es sollen tatsächlich die *Un*gleichungen direkt gelöst werden, d.h., es sollen nicht die entsprechenden Gleichungen gelöst und einzelne „Probe“-Punkte eingesetzt werden.

14. Beweisen Sie durch Widerspruch: Es sei n eine natürliche Zahl. Wenn n^5 ungerade ist, dann ist auch n ungerade.

15. a) Es sei x eine irrationale Zahl, und y eine rationale Zahl. Beweisen Sie, dass $x + y$ eine irrationale Zahl ist.

    b) Es seien x_1 und x_2 zwei beliebige irrationale Zahlen. Untersuchen Sie, ob $x_1 + x_2$ für alle möglichen Werte von x_1, x_2 immer irrational ist.

16. Es sei $\mathbb{Z}[x]$ die Menge aller Polynome $f(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Jedes Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ kann in der Form $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ geschrieben werden, wobei $a_i \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist. $\mathbb{Z}[x]$ mit der üblichen Addition und Multiplikation von Polynomen ist ein Ring.

    a) Zeigen Sie die Ring-Eigenschaften der Addition.

    b) Was ist das neutrale Element der Multiplikation? Ist $\mathbb{Z}[x]$ ein Körper?

    c) Schreiben Sie das Produkt zweier Polynome $f(x)g(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right)$ in der Form $\sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$ und geben Sie die Koeffizienten c_k (in Abhängigkeit von a_i, b_j, m und n) allgemein an, und schreiben Sie c_0, c_1, c_2, c_3 direkt hin.

    c) Sind die Polynome vom Grad 3 (oder ≤ 3) auch ein Ring?

Bitte zur 1. Klausur Analysis T1/bzw. 1a online anmelden. (Hinweis: es wird in mehreren Räumen gleichzeitig geschrieben. Der genaue Raum für Sie wird kurz vorher auf Webseite oder Übungsblatt bekanntgegeben.)

17. Untersuchen Sie die Folgen

$$(a)\ \left(\frac{(n+1)(n^2-1)}{(2n+1)(3n^2+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (b)\ \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

$$(c)\ \left(\frac{1}{n^2}+(-1)^n\frac{n^2}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (d)\ \left(\frac{4^n+1}{5^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

18. Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Folge

$$x_n = \sqrt{n^2+11n+21} - \sqrt{n^2+6}$$

sowie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

19. Sind die folgenden Folgen konvergent? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

    (a) $\cos(n\pi)$,

    (b) $\dfrac{2^n}{n!}$,

    (c) $\dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-1)3n}$.

20. Untersuchen Sie die durch

$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{7+3a_n}{3+a_n} \quad (n \geq 1)$$

rekursiv definierte Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert. Überlegen Sie auch kurz, was passiert, wenn Sie mit $a_1 = 2$ starten?

21. Untersuchen Sie die durch

$$x_0 = \frac{3}{2}, \qquad x_{n+1} = \frac{2}{3-x_n} \quad (n \geq 0)$$

rekursiv definierte Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Bitte zur 1. Klausur Analysis T1/bzw. 1a online anmelden. (Hinweis: es wird in mehreren Räumen gleichzeitig geschrieben. Der genaue Raum für Sie wird kurz vorher auf Webseite oder Übungsblatt bekanntgegeben.)

22. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n(n!)}{(2n)!}$

23. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz

    (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

    (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n+1}}$

    (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}$

24. Bestimmen Sie die Häufungspunkte folgender Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Geben Sie zu jedem Häufungspunkt eine gegen ihn konvergente Teilfolge von x_n an.

    (a) $x_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})$.

    (b) $x_n = \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{3}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

25. Wenn man $(x+y+z)^5$ ausmultipliziert, ergibt sich eine Formel der Form $(x+y+z)^5 = \sum_{i,j,k} c_{i,j,k}\, x^i y^j z^k$ mit Koeffizienten $c_{i,j,k} \in \mathbb{Z}$. (Das Symbol $\sum_{i,j,k}$ bedeutet hier, dass über geeignete Kombinationen von i, j und k summiert wird).

    Geben Sie $c_{5,0,0}$, $c_{1,1,3}$ und $c_{3,3,3}$ an.

    (Alte Klausuraufgabe)

26. Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz, und bestimmen Sie (falls konvergent) ihre Summe:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$,

    (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$.

27. Man skizziere die folgenden Punktmengen in der Gauß'schen Zahlenebene:

    (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \leq |z-1|\}$
    (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-3i| < 7\}$
    (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - z| \leq 1\}$
    (d) $\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} + z + \bar{z} < 0\}$
    (e) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| + |z+i| \leq 3\}$
    (f) $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z^2 \leq 4\}$

28. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, den Betrag und die konjugiert komplexe Zahl zu $(\frac{1-i}{1+i})^n,\ n \in \mathbb{Z}$.

29. (a) Bestimmen Sie die Quadratwurzeln von $-i$.
    (b) Zeigen Sie, dass $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ eine sechste Wurzel aus 1 ist, d.h. dass $z^6 = 1$ gilt.

30. Lösen Sie folgende Gleichungen über den komplexen Zahlen. Geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil der Lösung an.

    (a) $z^2 - 7z + (13+i) = 0$,
    (b) $z^2 + 3z + (6+2i) = 0$.

31. Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von $z \in \mathbb{C}$, sowie z^2 und $|z|^2$.
    a) $\dfrac{1-i}{1-2i}z = \dfrac{2+2i}{1+3i}$ b) $z = \dfrac{i+3}{2i-4}$ c) $z = (2+i)^2 + 7 - 3i$

    Erinnerung: bitte zur T1-Klausur im Tug-online anmelden, und Deadline zur Anmeldung beachten. Genaue Raumeinteilung für Klausur wird auf Webseite bekanntgegeben. (Unbedingt in den *richtigen* Raum kommen!)

    Prüfungsstoff für T1 und 1a: insbesondere die Übungsblätter 1-6, und alles andere aus der Vorlesung und Skript.

    Es sind keine elektronischen Hilfsmittel, also auch keine Taschenrechner, erlaubt.

    Viel Erfolg!

32. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^4 - 9$. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Geben Sie gegebenenfalls eine möglichst große Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ an, sodass $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv ist. Geben Sie weiters gegebenenfalls eine möglichst große Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ an, sodass $f : \mathbb{R} \to B$ surjektiv ist.

33. Seien f, g bijektive Abbildungen von M nach M. Zeigen Sie, dass auch $f \circ g$ eine bijektive Abbildung von M nach M ist.

34. Für die nachstehende Funktionen ist zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta_\epsilon > 0$ so zu bestimmen, dass aus $|x - x_0| < \delta_\epsilon$ die Beziehung $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ folgt.
$$f(x) = x^3, \quad D(f) = \mathbb{R}.$$

35. Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind:
$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{falls } x < 0 \text{ oder } x > 1 \\ x^2 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$
$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{falls } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in $[-\pi, \pi]$:
$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$
$$(d) \quad f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$

36. Es seien zwei Funktionen definiert durch $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
    (a) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe von g für alle $x \in \mathbb{C}$ konvergiert, d.h., dass die Funktion für $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert ist.
    (b) Beweisen Sie, dass $f(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$ und $g(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$ gilt.
    (c) Beweisen Sie, dass $g^2(x) - f^2(x) = 1$ gilt.
    (d) Weisen Sie $g(x + y) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$ nach.
    (e) Benutzen Sie die Potenzreihe, um $f(ix)$ durch $\sin(x)$ auszudrücken.
    (f) Finden Sie analog einen Ausdruck für $g(ix)$.

37. Es sei $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Berechnen Sie die ersten Koeffizienten der Potenzreihe der Tangensfunktion (entwickelt um $x_0 = 0$), bis zum Koeffizienten von x^7.
    Anleitung: Es sei $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Wenn die a_n und b_n bekannt sind, kann man nacheinander $c_0, c_1, \ldots$ ausrechnen.

38. Drücken Sie $\sin(5s)$ nur durch $\sin(s)$ (und Potenzen hiervon) aus.

39. Berechnen Sie die Summen
    (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x$
    (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x,$

    indem Sie die Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ verwenden.

40. (a) Geben Sie alle rellen Lösungen x von $\cosh x = 2$ an.
    (b) Die komplexe Funktion $\cosh z$ ist analog zur rellen definiert, für alle $z \in \mathbb{C}$. Entweder über die Potenzreihe, oder als $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$. Geben Sie alle komplexen Lösungen z von $\cosh z = \frac{1}{2}$ an.

41. Sei $z = x + iy$. Stellen Sie Real- und Imaginärteil von $\sin(z)$ als Funktionen von x und y dar.

42. Geben Sie alle(!) komplexen Werte von i^i und 1^{2i} an.

43. Geben Sie alle komplexen Lösungen von $z^6 + (2-6i)z^3 = 11 + 2i$ an. Geben Sie die Lösungen jeweils in kartesischen und in Polarkoordinaten an. (Hinweis: Lösen Sie mit $w = z^3$ zunächst eine quadratische Gleichung in w.)

    Hinweis (nur für Analysis 1a (STEOP)): Ihre 2. Klausur ist am 12.12., 18-20 Uhr in P1. Wir melden alle, die zur 1. Klausur angemeldet waren, automatisch für den 12.12. an. (Aufgrund des Punkteschemas sollten natürlich alle die 2. Klausur mitschreiben).

44. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Ausdrücke:
(a) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (b) $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ (c) $\ln \dfrac{ax+b}{cx+d}$
(d) $(1+e^x)^4 \ln(x+\sin^2(\dfrac{1}{x^2}))$ (e) $2^{x^2 \cos x}$ (f) x^x (g) $(x^x)^x$ (h) x^{x^x}

45. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)} \ , \quad (b) \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} \ ,$$

$$(c) \quad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \ , \quad (d) \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}.$$

46. Ersetzen Sie folgende Funktionen durch ihre Taylorpolynome des angegebenen Grades, und schätzen Sie den Fehler im angegebenen Bereich ab:
a) $f(x) = \sin(x)$ durch $T_3(f,x,0)$ in $|x| \leq 1/10$
b) $f(x) = \arctan(x)$ durch $T_3(f,x,0)$ in $|x| \leq 1/10$

47. Diskutieren Sie die folgenden reellen Funktionen (Skizzen!):
(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ (c) $f(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$
(d) $f(x) = x\,\ln(x)$ (e) $f(x) = (x^2-1)e^{-x}$ (f) $f(x) = e^{-x}\sin x, x \geq 0$

Hinweis (nur für Analysis 1a (STEOP)): Ihre 2. Klausur ist am 12.12., 18-20 Uhr in P1. Wir haben alle, die zur 1. Klausur angemeldet waren, automatisch für den 12.12. angemeldet. (Aufgrund des Punkteschemas sollten natürlich alle die 2. Klausur mitschreiben).

Hinweis für Analysis 1b und T1:
Die 2. Klausur von Analysis T1 und die Klausur von 1b findet am 11.1.2017 um 18-20.15 statt. Dazu bitten wir alle, sich jeweils anzumelden.

48. Geben Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{\sin x}$ an:
f', f'', alle Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, genaues Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to 0$. Skizze. Geben Sie (mit Begründung) den genauen Wertebereich der Funktion an.

49. Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale:
(a) $\displaystyle\int x^3 \ln x \, dx$ (b) $\displaystyle\int x^n \ln x \, dx$ allgemein, für eine natürliche Zahl n
(c) $\displaystyle\int x^3 \sin x \, dx$ (d) $\displaystyle\int \cos^4 x \, dx$ (e) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1} \, dx$ Hinweis: $x = \sinh t$

50. Integrieren Sie:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2 - 1} \, dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1} \, dx.$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh x}.$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 1} \, dx.$

(f) $\displaystyle\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2+1} + x}.$

51. Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

(a) $\displaystyle\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} \, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} \, dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \, dx$ (Hinweis: $t = x^2 + 2x + 2$)

(d) $\displaystyle\int \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} \, dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + 7}{x^2 - x - 6} \, dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 5x^2 - 7x + 6}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} \, dx$

52. Integrieren Sie: $\int \frac{35 - 22x + 3x^2}{-18 + 21x - 8x^2 + x^3} \, dx.$

53. Berechnen Sie

$$\int_0^2 x(\sqrt{x+1})^3 \, dx.$$

Info für ICE: 12.12. (Klausur für STEOP 1a): Insbesondere Übungsblätter 6-9.
Für ICE: (Kreuzerl ab Blatt 10 in Analysis 1b Datenbank, Link auf Webseite.)

54. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die zwischen den Parabeln $y(x) = x^2$ und $y^2 = x$ eingeschlossen ist. (Skizze!)

55. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche, welche von den zwei Kurven $y_1 = x^2 + \sqrt{16 - x^2}$ und $y_2 = x^2 - \sqrt{16 - x^2}$ eingeschlossen ist.

    Zu dieser Aufgabe gibt es mehrere Lösungen, z.B. eine längere Rechnung, oder eine kurze elegante Lösung...

56. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kettenlinie $y = a\cosh(\frac{x}{a})$, $0 \leq x \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

57. Berechnen Sie Oberfläche und Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kettenlinie $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ $(-a \leq x \leq a)$ um die x-Achse entsteht.

58. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kurve $y^2 - x^2 = 1$ $(-1 \leq x \leq 1,\ y > 0)$ um die x-Achse entsteht.

59. Die Gleichung $4x^2 + y^2 = 36$ beschreibt eine Ellipse. Die Ellipse rotiere um die x- Achse. Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des entstehenden dreidimensionalen Körpers.

60. Berechnen Sie die Bogenlänge der Asteroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1,\ -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$. (Hinweis: wählen Sie die Parametrisierung $x(t) = (\cos t)^3$, $y(t) = (\sin t)^3$ und zeichnen Sie die Kurve.)

61. Berechnen Sie die von der Asteroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1,\ -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$ eingeschlossene Fläche. (Hinweis: wählen Sie die Parametrisierung $x(t) = (\cos t)^3$, $y(t) = (\sin t)^3$ und zeichnen Sie die Kurve.)

62. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $f(x) = 2x^{3/2} + 2$ zwischen $x = 0$ und $x = 2$.

    Hinweise:
    Teilnehmer von Analysis T1 (501446), die an der ersten Klausur angemeldet waren, haben wir für den 11.1.2017 angemeldet. (Eine Note wird ausgestellt, wenn Sie an mindestens einer der Klausuren teilgenommen haben.)

    Teilnehmer von Analysis 1b (ICE/Telematik) bitte zur Klausur am 11.1.2017 anmelden (Anmeldeschluss: 08.1.2017 23.50).

63. Untersuchen Sie, ob folgende uneigentliche Integrale existieren, und wenn ja, geben Sie den Wert an. (Für a) -c) mit genauer Begründung, für d) z.B. mit einer Formelsammlung oder Computer, d.h. Begründung für Teil d) nicht erforderlich).

$$a)\ \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx \qquad b)\ \int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx$$

$$c)\ \int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2}\,dx \qquad d)\ \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$$

64. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Drücken Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

als bestimmtes Integral aus und berechnen Sie damit den folgenden Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

65. Berechnen Sie näherungsweise $I = \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$ durch Entwicklung des Integranden in eine Potenzreihe. Wieviele Reihenglieder sind notwendig, damit der Fehler kleiner als $\epsilon = 10^{-3}$ wird?

66. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D und die partiellen Ableitungen erster Ordnung nach allen auftretenden Variablen im Innern B von D.

(a) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; (b) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{\sqrt{x+2y}}$;

67. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$.
a) Man berechne grad $f(x,y)$
b) Man berechne die Richtungsableitung an der Stelle $\vec{x}_0 = (1,2)$ in Richtung $(3,4)$.
c) In welche Richtungen (vom Punkt $\vec{x}_0 = (1,2)$) ist die Steigung c1) maximal, c2) minimal, c3) gleich Null?
d) Man bestimme die Tangentialebene an f im Punkt $\vec{x}_0 = (1,2)$.

68. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = 4\ln\frac{x^2}{x^2+y^2}$ für $x,y > 0$.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen f_x und f_y von f.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten von f im Punkt $x^0 = (1,1)$.

(c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $x^0 = (1,1)$ in Richtung $\vec{e} = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

(d) Bestimmen Sie im Punkt $(x^0, f(x^0)) = (1,1,f(1,1))$ die Tangentialebene (in Hesseform) an die durch $z = f(x,y)$ mit $x,y > 0$ erklärte Fläche.

69. Man finde die Stellen lokaler Extrema der Funktion $f(x, y) = x + y$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1 = 0$.

70. Einem Kreis mit Radius R ist ein Dreieck maximaler Fläche einzuschreiben. Bestimmen Sie die Seitenlängen.

71. Welcher Punkt der Fläche $z = x^2 + y^2$ liegt dem Punkt $(1, 1, \frac{1}{2})$ am nächsten?

72. Es sei $0 \leq x \leq 100, \quad 0 \leq y \leq 100, \quad 0 \leq z \leq 100$. Finden Sie den Quader mit Seitenlängen x, y, z, mit maximalem Volumen, wenn die Oberfläche $2(xy+xz+yz) = 96$ konstant ist.