63. Untersuchen Sie, ob folgende uneigentliche Integrale existieren, und wenn ja, geben Sie den Wert an. (Für a) -c) mit genauer Begründung, für d) z.B. mit einer Formelsammlung oder Computer, d.h. Begründung für Teil d) nicht erforderlich).

$$a)\ \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx \qquad b)\ \int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx$$

$$c)\ \int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2}\,dx \qquad d)\ \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$$

64. Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Drücken Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

als bestimmtes Integral aus und berechnen Sie damit den folgenden Grenzwert: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.

65. Berechnen Sie näherungsweise $I=\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$ durch Entwicklung des Integranden in eine Potenzreihe. Wieviele Reihenglieder sind notwendig, damit der Fehler kleiner als $\epsilon = 10^{-3}$ wird?

66. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D$ und die partiellen Ableitungen erster Ordnung nach allen auftretenden Variablen im Innern $B$ von $D$.

(a) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; (b) $f(x,y)=x^3-2x^2y^2+4xy^3+y^4+10$;

(c) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{\sqrt{x+2y}}$;

67. Es sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y)=\frac{y}{1+x^2}$.
a) Man berechne grad $f(x,y)$
b) Man berechne die Richtungsableitung an der Stelle $\vec{x}_0=(1,2)$ in Richtung $(3,4)$.
c) In welche Richtungen (vom Punkt $\vec{x}_0=(1,2)$) ist die Steigung c1) maximal, c2) minimal, c3) gleich Null?
d) Man bestimme die Tangentialebene an $f$ im Punkt $\vec{x}_0=(1,2)$.

68. Gegeben sei die Funktion $f(x,y)=4\ln\frac{x^2}{x^2+y^2}$ für $x,y>0$.

   (a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $f_x$ und $f_y$ von $f$.
   (b) Bestimmen Sie den Gradienten von $f$ im Punkt $x^0=(1,1)$.
   (c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $f$ im Punkt $x^0=(1,1)$ in Richtung $\vec{e}=(\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2})$.
   (d) Bestimmen Sie im Punkt $(x^0,f(x^0))=(1,1,f(1,1))$ die Tangentialebene (in Hesseform) an die durch $z=f(x,y)$ mit $x,y>0$ erklärte Fläche.