1. Test Analysis T1/1a, 14.11.2016, A

Name, Vorname	Matr.nummer	Fachrichtung

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$	A
Max. Punkte	5	5	5	5	20	
erreichte Punkte						

BEGINNEN SIE ALLE AUFGABEN AUF JEWEILS EINEM NEUEN BLATT UND SCHREIBEN SIE AUF JEDES BLATT IHREN NAMEN UND MATRIKELNUMMER!!! Begründen Sie Ihre Schritte ausreichend.
Es sind *keine* elektronischen Hilfsmittel erlaubt.

1) a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)}.$$

b) Untersuchen Sie, ob die Reihe konvergiert, und wenn ja, berechnen Sie den Wert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

2) a) Beweisen Sie folgende Aussagen:
a1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f(n) = (n+1)(n+2)$ gerade.
a2) Für $k \in \mathbb{N}$ und $n = 4k+1$ ist $g(n) = n^3 - 5n + 8$. durch 4 teilbar.
(Hinweis: es gibt verschiedene Methoden, die zum Ziel führen).

b) Begründen Sie kurz, aber präzise, ob die folgenden Aussagen jeweils korrekt sind oder nicht.

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : (x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} : x < z < y)\,.$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{N}) : |x - k| < \frac{1}{2}.$$

3) (a) Geben Sie alle komplexen Zahlen z an, für die gilt:

$$z^2 + 5z + 10 + 2i = 0.$$

(b) Untersuchen Sie, ob die Reihe konvergiert, und wenn ja, berechnen Sie ihren Wert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+2}.$$

4) (a) Begründen Sie, warum folgende Ungleichungen gelten:

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{n} \leq \frac{4}{5}.$$

(b) Untersuchen Sie, ob der Grenzwert existiert, und wenn ja, berechnen Sie ihn.

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n-1})^{4n+1}.$$

Viel Erfolg!

1. Test Analysis T1/1a, 14.11.2016, A

Name, Vorname	Matr.nummer	Fachrichtung

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$	A
Max. Punkte	5	5	5	5	20	
erreichte Punkte						

BEGINNEN SIE ALLE AUFGABEN AUF JEWEILS EINEM NEUEN BLATT UND SCHREIBEN SIE AUF JEDES BLATT IHREN NAMEN UND MATRIKELNUMMER!!! Begründen Sie Ihre Schritte ausreichend.
Es sind *keine* elektronischen Hilfsmittel erlaubt.

1) a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{24} - \frac{1}{2(k+3)(k+4)}.$$

b) Untersuchen Sie, ob die Reihe konvergiert, und wenn ja, berechnen Sie den Wert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

2) a) Beweisen Sie folgende Aussagen:
a1) Für $k \in \mathbb{N}$ und $n = 5k+2$ ist $f(n) = n^3 - 2n - 4$ durch 25 teilbar.
a2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $g(n) = n(n-3)$ durch 2 teilbar.
(Hinweis: es gibt verschiedene Methoden, die zum Ziel führen).

b) Begründen Sie kurz, aber präzise, ob die folgenden Aussagen jeweils korrekt sind oder nicht.

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : y \geq 2|x| + 3.$$

$$(\forall z \in \mathbb{C})(\exists w \in \mathbb{C}) : zw = 1.$$

3) a) Untersuchen Sie, ob der Grenzwert existiert, und wenn ja, berechnen Sie ihn.

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2n})^{4n+1}.$$

b) Begründen Sie, warum folgende Ungleichungen gelten:

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n n!} \leq \frac{5}{8}.$$

4) a) Untersuchen Sie, ob die Reihe konvergiert, und wenn ja, berechnen Sie ihren Wert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{n}+1}.$$

b) Geben Sie alle komplexen Zahlen z an, für die gilt:

$$z^2 + 7z + 13 + i = 0.$$

Viel Erfolg!