Tutorium Numerisches Rechnen und lineare Algebra 8.1.2018

---

1. Geben Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix in Abhängigkeit von b an. Für welche $b \in \mathbb{R}$ existiert eine reelle Cholesky-Zerlegung?

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & b \end{pmatrix}$$

2. Geben Sie für die Tridiagonalmatrix W die LR-Zerlegung an:

$$W = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & r_n \end{pmatrix}.$$

   Die rechte Seite kann durch
   $r_1 = a_1$
   $l_i = \frac{c_i}{r_{i-1}}, \qquad i = 2, \ldots, n$
   $r_i = a_i - l_i b_{i-1}, \qquad i = 2, \ldots, n$ berechnet werden. Es muss $r_1, \ldots, r_n \neq 0$ gelten.

   Führen Sie diese Rechnung durch, wenn $n = 4$ und $a_i = 3, \quad i = 1, \ldots, n$.
   $b_i = c_i = 1, \qquad i = 1, \ldots, n$.
   (Genaugenommen wird c_1 und b_n nicht verwendet),
   Machen Sie die Probe.

3. Eine Addition und Multiplikation der Form $a+bc$ werde als ein Rechenschritt gezählt. Eine Division wird als ein Rechenschritt gezählt.

   Zeigen Sie, dass die Anzahl der Rechenschritte des Cholesky-Verfahrens für die Zerlegung einer $n \times n$ -Matrix für große n etwa $\frac{1}{6}n^3$ Rechenschritte und n Wurzeloperationen sind. Hinweis: Sie können hier verwenden, dass $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)n}{2}$ und $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$ gilt.

Tutorium Numerisches Rechnen und lineare Algebra 8.1.2018

Als Hausaufgaben und zur Klausurvorbereitung:

4. Ermitteln Sie die Cholesky-Zerlegung der folgenden Matrizen und machen Sie die Probe.

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 46 \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

.

5. Geben Sie für die Tridiagonalmatrix W die LR-Zerlegung an:

$$W = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Führen Sie diese Rechnung durch, wenn $n = 4$ und $a_i = 4, \quad i = 1, \ldots, n.$
$b_i = c_i = 1, \qquad i = 1, \ldots, n.$
(Genaugenommen wird c_1 und b_n nicht verwendet),
Machen Sie die Probe.