

Tutorium Numerisches Rechnen und lineare Algebra

Bsp02

7. Gegeben sind die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Unter welchen Bedingungen an $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt

$$A_1 \cdot B = B \cdot A_1 \quad \text{bzw.} \quad A_2 \cdot B = B \cdot A_2$$

8. Seien $A, B, C, D, E \in M(n \times n)$ invertierbare Matrizen, die die Relation

$$A \cdot B \cdot C \cdot D = E$$

erfüllen.

Man drücke C^{-1} durch A, B, D und E aus.

9. Man bestimme den Rang der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme:

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} w + x + 2y + z &= 1 \\ w - x - y + z &= 0 \\ + x + y &= -1 \\ w + x &+ z = 2 \end{aligned}$$

11. Für welche $t \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem $Ax = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1-t & 2 & -3 \\ 2 & 1-t & -6 \\ -4 & 4 & 6-t \end{pmatrix}$$

eine nichttriviale Lösung?

Tutorium Numerisches Rechnen und lineare Algebra

12. Für welche $t \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem $Ax = b$ mit A von Bsp. 11 und

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung?

13. Man untersuche, für welche $k \in \mathbb{R}$ das folgende Gleichungssystem

a) lösbar ist,

b) eindeutig lösbar ist.

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & + & kx_3 & = & 1 \\ x_1 & + & kx_2 & + & x_3 & = & 1 \\ kx_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -2 \end{array}$$

14. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & a^2 + 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a + 4 \end{pmatrix}$$

lösbar bzw. eindeutig lösbar ist.