Bsp07

37. Gegeben ist die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{P}_2 & \to & \mathbb{P}_2 \\ & p(t) & \mapsto & F(p(t)) := p(2t-1) \end{array}$$

   (a) Man bestimme $M_{\mathcal{B}}(F)$ für $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$.
   (b) Man berechen $F(3+2t-t^2)$ einmal direkt, dann unter Verwendung von $M_{\mathcal{B}}(F)$.
   (c) Man zeige, dass F bijektiv ist.
   (d) Man bestimme $M_{\mathcal{B}}(F^{-1})$.
   (e) Man berechne $F^{-1}(2-3t+t^2)$.

38. Sei $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung definiert durch

$$F(a+bt+ct^2) = \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \\ c-a \end{pmatrix}$$

   (a) Man bestimme die darstellende Matrix $A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$, wobei $\mathcal{A} = (1, t, t^2)$ und $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ Basen der Vektorräume $\mathbb{P}_2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ bezeichnen.
   (b) Für $p(t) = 2 + t - t^2$ bestimme man $w = F(p)$ einmal direkt und einmal über die Relation $c_{\mathcal{B}}(w) = A \cdot c_{\mathcal{A}}(p)$.
   (c) Man gebe für Kern(F) und Bild(F) jeweils eine Basis an.

39. Gegeben ist die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} & \mapsto & F\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_3 \\ a_2 - a_1 \\ a_1 - a_3 \\ a_2 - a_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

   (a) Man ermittle $M^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}'}(F)$, wobei $\mathcal{K} = \{e_1, e_2, e_3\}$ und $\mathcal{K}' = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ die kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ sind.
   (b) Man untersuche, ob F injektiv bzw. surjektiv ist.
   (c) Man bestimme Kern(F) durch die Angabe einer Basis.
   (d) Man bestimme Bild(F) durch die Angabe einer Basis.

(e) Man entscheide, ob der Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im Bild von F liegt.

40. Man betrachte die folgenden Skalarprodukte im $\mathbb{P}_2$:

(a)

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot g(t)\, dt$$

(b) $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t)\, dt$

Für $f(t) = t, g(t) = 1 + \frac{3}{2}t^2$ bestimme man jeweils $\langle f, g \rangle$.
Unter Verwendung des ersten Skalarprodukts bestimme man eine Orthonormalbasis des $\mathbb{P}_2$.