21. Die lineare Euler-Differentialgleichung: Es sei
$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = q(x).$$
Eine partikuläre Lösung für die homogene Dgl. findet man mit dem Ansatz $y = x^k$. (Einsetzen in die Dgl. ergibt eine Gleichung (1) für k, nach k auflösen.).
Falls die Gleichung (1) die t-fache Nullstelle $k = a$ hat, dann sind $y = x^a, x^a \ln x, \ldots x^a (\ln x)^{t-1}$ Lösungen. Falls die Gleichung (1) die t-fache komplexe Nullstelle $k = \alpha + i\beta$ hat, (dann ist auch $k = \alpha - i\beta$ eine t-fache komplexe Nullstelle), dann sind
$$x^\alpha \cos(\beta \ln x), x^\alpha \cos(\beta \ln x) \ln x, \ldots, x^\alpha \sin(\beta \ln x), x^\alpha \sin(\beta \ln x) \ln x, \ldots$$
Lösungen. Für die inhomogene Dgl: Ansatz vom Typ der rechten Seite.
Aufgabe: Lösen Sie mit obigem Ansatz (und machen Sie die Probe):
$$a) \quad x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0, \qquad b) \quad x^2 y'' - 6y = 12 \ln x.$$

22. Lösen Sie das folgende System linearer Differentialgleichungen
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$
unter den Anfangsbedingungen $x_1(0) = 0$ und $x_2(0) = 5$.

23. Finden Sie die allgemeine Lösung des folgenden Systems linearer Differentialgleichungen
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - 3x_2, \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 + x_2. \end{aligned}$$

24. Betrachtet wird das System linearer Differentialgleichungen $\dot{x} = Ax + b$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
(a) Lösen Sie dieses System.
(b) Schreiben Sie dieses System als lineare Differentialgleichung 3. Ordnung.

25. Geben Sie die allgemeine Lösung an von $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

26. Geben Sie die allgemeine Lösung an von $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}$ mit
$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$
(Bei mehrfachem Eigenwert Resonanz-Ansatz mit Potenzen von t versuchen.)
Für die Prüfung bitte im tug-online anmelden!
Neu: Auf der Webseite finden Sie auch alte Klausuraufgaben.