

Tutorium Numerisches Rechnen und lineare Algebra

Bsp10

46. Geben Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix in Abhängigkeit von b an. Für welche $b \in \mathbb{R}$ existiert eine reelle Cholesky-Zerlegung?

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & b \end{pmatrix}$$

47. Geben Sie für die Tridiagonalmatrix W die LR-Zerlegung an:

$$W = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & r_n \end{pmatrix}.$$

Die rechte Seite kann durch

$$r_1 = a_1$$

$$l_i = \frac{c_i}{r_{i-1}}, \quad i = 2, \dots, n$$

$$r_i = a_i - l_i b_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n \text{ berechnet werden. Es muss } r_1, \dots, r_n \neq 0 \text{ gelten.}$$

Führen Sie diese Rechnung durch, wenn $n = 4$ und $a_i = 3$, $i = 1, \dots, n$.

$$b_i = c_i = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

(Genaugenommen wird c_1 und b_n nicht verwendet),

Machen Sie die Probe.

48. Eine Addition und Multiplikation der Form $a+bc$ werde als ein Rechenschritt gezählt. Eine Division wird als ein Rechenschritt gezählt.

Zeigen Sie, dass die Anzahl der Rechenschritte des Cholesky-Verfahrens für die Zerlegung einer $n \times n$ -Matrix für große n etwa $\frac{1}{6}n^3$ Rechenschritte und n Wurzeloperationen sind. Hinweis: Sie können hier verwenden, dass $\sum_{k=1}^n k = \frac{(n+1)n}{2}$ und $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$ gilt.