Bsp06

30. Welche der folgenden Abbildungen ist linear?

$$F_1: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mapsto F_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2 + 1 \\ -a_1 - 2 \end{pmatrix}$$

$$F_2: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto F_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3v_2 \\ -5v_1 \\ 2v_2 - 4v_1 \end{pmatrix}$$

$$F_3: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto F_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1^2 x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

31. Für welche $u \in \mathbb{R}^2$ ist die Abbildung

$$F: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto F(v) := v + u$$

linear?

32. Gegeben sind die beiden Abbildungen

$$F: \quad \mathbb{R}^2 \to M(2 \times 2), \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto F \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + b & b \\ 0 & a - b \end{pmatrix}$$

$$G: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mapsto G \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2c + d \\ -d \end{pmatrix}$$

Man zeige, dass F und G linear sind und berechne

$$(F \circ G) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (F \circ G) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Kann man $(G \circ F) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ berechnen?

33. Sei $F: M(2 \times 2) \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit

$$F\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1, \quad F\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2, \quad F\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 3, \quad F\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 4\,.$$

Man bestimme

$$F\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\,.$$

34. Gegeben ist die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ -x + 3y - 2z \\ 2x - y + 3z \end{pmatrix} \end{array}$$

Man bestimme Kern(F) und Bild(F) und gebe für diese Vektorräume jeweils eine Basis an.

35. Sei $F: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung definiert durch

$$F(a + bt + ct^2) = \begin{pmatrix} a + b \\ b + c \\ c - a \end{pmatrix}$$

(a) Welches der folgenden Polynome liegt in Kern(F)?

$$\text{a) } 1 - t \quad \text{b) } 1 + t - t^2, \quad \text{c) } 1 - t + t^2$$

(b) Welcher der folgenden Vektoren liegt in Bild(F)?

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) Man beschreibe Kern(F) und Bild(F) jeweils durch die Angabe einer Basis.

36. Im $\mathbb{P}_3$ bestimme man die Transformationsmatrix T des Basiswechsels $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ für

$$\mathcal{A} = (1, t, t^2, t^3), \ \mathcal{B} = (1 + t, t + t^2, t^2 + t^3, t^3)$$

und gebe dann unter Verwendung von T für das Polynom $p(t) = 2 + 3t - 4t^2 + t^3$ den Koordinatenvektor $x = c_{\mathcal{B}}(p)$ an.