Mathematik I für ChemikerInnen WS 2019/20
11. Übungsblatt

45. Entwickeln Sie $f(x) = 1 + x\sin(x^2)$ nach der Taylor'schen Formel um $x_0 = 0$ bis zu Potenzen dritter Ordnung und berechnen Sie näherunsweise $f(\frac{1}{2})$. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem exakten Wert!

46. Diskutieren Sie die Funktion
$$f(x) = (\ln(x))^2 - \ln(x)$$
und bestimmen Sie dabei die Definitionsmenge, die Nullstellen, die Extremwerte, die Wendepunkte und das Monotonieverhalten. Fertigen Sie eine Skizze der Funktion an!

47. Bestimmen Sie von der Funktion
$$f(x) = \frac{3 - x^2}{x^2 - 4}$$
die Definitionsmenge, die Nullstellen, die Extremwerte und die Wendepunkte. Untersuchen Sie weiters das Monotonierverhalten der Funktion und das Verhalten im Unendlichen. Fertigen Sie für das Intervall $[-6, 6]$ eine Skizze an.

48. Schreiben Sie $\sinh x$ und $\cosh x$ mittels der Exponentialfunktion und begründen Sie *damit*, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$4(\sinh(x))^3 = \sinh(3x) - 3\sinh(x).$$

49. Gegeben sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x(x^2 + 6x + 9)$. Berechnen Sie
a) alle Nullstellen von f,
b) f' und
c) f''.
d) Geben Sie alle Extremstellen von f an. (Mit genauer Erläuterung ob und warum Minimum oder Maximum vorliegt.)
e) Untersuchen Sie, mit genauer Begründung, ob $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ existieren, und falls ja, geben Sie diese an.
f) Versuchen Sie eine grobe Skizze.

50. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ an, so dass Sie $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \frac{x^2+y}{x^3-y^3}$ untersuchen können. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$. Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ im Punkt $(x_0, y_0) = (1, -1)$. Geben Sie die Gleichung $z = ...$ der Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0) = (1, -1)$ an.

(Zur Information: Die letzten 3 Aufgaben sind die Aufgaben der Klausur vom Kurs 2017/18.)