Übungsblatt 03

Aufgabe 3-1 Übungssammlung 25d).

Aufgabe 3-2 Übungssammlung 27, Matrix B.

Aufgabe 3-3 Übungssammlung 32 b),c),f).

Aufgabe 3-4 Übungssammlung 34 x),y).

Aufgabe 3-5 a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Determinante nur dann 0 wird, wenn mindestens 2 der Konstanten a, b, c gleich sind. (Hierbei hilft es vermutlich, die Determinante nicht komplett auszumultiplizieren, sondern Faktoren wie $(a-b)$ stehen zu lassen).

(Eine richtige Verallgemeinerung dieses Beispiels führt zu dem sehr nützlichen Satz, dass es für n beliebig vorgegebene Funktionswerte $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ genau ein Polynom $p(x)$ vom Grad $n-1$ gibt, so dass $f(x_i) = p(x_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt.) Dies Polynom nennt man Interpolationspolynom.

c) (Beispiel zu obiger Bemerkung, wieder mit $n = 3$.) Gesucht ist das (eindeutige) quadratische Polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ für das $p(1) = 1, p(2) = 2, p(4) = 7$ gilt. Stellen Sie aus dieser Information ein lineares Gleichungssystem in den Variablen a, b, c auf, und lösen Sie es, und machen Sie die Probe.

Aufgabe 3-6 Übungssammlung 36. Taschenrechner erlaubt.

Aufgabe 3-7 Nehmen Sie eine von Ihnen selbst gewählte Matrix $A \in M(3 \times 3)$ mit der Eigenschaft

$$A^t = -A.$$

(Was gilt dann für die Elemente auf der Hauptdiagonalen?) Berechnen Sie det A. Wählen Sie andere solche Matrizen A. Beobachten Sie, was passiert, und beweisen Sie Ihre Beobachtung für beliebige Matrizen $A \in M(3 \times 3)$ mit der Eigenschaft

$$A^t = -A.$$

Aufgabe 3-8 Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}.$$

Auch hier gilt: Dies als Produkt stehen zu lassen, ist interessanter, als es auszumultiplizieren.

Aufgabe 3-9 Es ist $A_n = (a_{ik}) \in M(n \times n)$ mit

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k+1 \text{ oder } i = k-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Schreiben Sie $A_1, \ldots, A_5$ explizit auf.
Behauptung: für ungerades n gilt $\det A_n = 0$.
Anleitung.
Schritt 1: Betrachten Sie $n = 1$.
Schritt 2: Dann betrachten Sie ungerades $n \geq 3$, wobei die Behauptung für ungerades $n-2$ schon bewiesen sei. Subtrahieren Sie die erste Zeile von der 3. Zeile, (und schreiben es in die dritte Zeile) und die erste Spalte von der dritten Spalte (und schreiben es in die dritte Spalte). (Schreiben Sie die Matrix z.B. für $n = 5$ hin.) Überlegen Sie sich nun, warum diese neue Matrix die gleiche Determinante hat, wie die gesuchte Matrix A_n, und warum diese Determinante dann 0 ist.

Bitte bis Dienstag, 11.40 Uhr im online System ankreuzen, bis 11.50 Uhr im Teach Center als pdf hochladen. Getippte Lösungen sind erlaubt. Wir erinnern daran, dass jede(r) die eigenen Lösungen bis zur Deadline hochlädt.
Konkrete Fragen dazu bis Mittwoch vormittag bitte im TC stellen. Hinweise zu den Aufgaben werde ich am Ende der Mittwoch Vorlesung geben. (Dies ist dann formal Teil des sogenannten Konversatoriums).