Übungsblatt 04

Aufgabe 4-1 Zeigen Sie die Lagrangesche Identität:

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2$$

für die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4-2 Zeigen Sie die Grassmann-Identität

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}$$

für Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4-3 Welche der folgenden Mengen sind lineare Teilräume des $\mathbb{R}^n$?

1. $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 = a, a = \text{konstant}\}$,
2. $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \geq 0\}$,
3. $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \cdot x_2 = 0\}$,
4. $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 = 0\} \cup \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_2 = 0\}$,
5. $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 = 0\} \cap \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_2 = 0\}$.

Aufgabe 4-4 Ein regulärer Tetraeder besteht aus 4 gleichseitigen Dreiecken gleicher Größe. Berechnen Sie das Volumen eines regulären Tetraeders mit Seitenlänge a. (Das Ergebnis ist von der Form $V = c\,a^3$, weobei c eine Konstante ist, die man z.B. leicht mit Wikipedia findet. Gesucht ist aber eine Begründung der Formel.) (Hinweis für einen möglichen Lösungsweg: Begründen Sie, dass $P_1 = (1,1,1), P_2 = (1,-1,-1), P_3 = (-1,1,-1), P_4 = (-1,-1,1)$ oder $Q_1 = (0,0,1), Q_2 = (0, \sqrt{8}/3, -1/3), Q_3 = (\sqrt{2/3}, -\sqrt{2}/3, -1/3), Q_4 = (-\sqrt{2/3}, -\sqrt{2}/3, -1/3)$ explizite Koordinaten regulärer Tetraeder sind).

Aufgabe 4-5 Die Grundfläche eines Tetraeders ist durch das Dreieck ABC mit $A = (-4,9,1), B = (3,3,-1)$ und $C = (6,-1,-3)$ gegeben. Die Spitze des Tetraeders ist der Schnittpunkt der beiden Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze S des Tetraeders.

2. Berechnen Sie die Koordinaten des Höhen-Fußpunktes F. (Den Fußpunkt erhält man, wenn man von der Spitze senkrecht auf die gegenüberliegende Fläche (hier also die Grundseite) projiziert.
3. Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders.
4. Geben Sie die Koordinaten des Punktes S' an, den man durch Spiegelung von S an der Grundfläche erhhält.

(Hinweis: die Koordinaten sind alle ganzzahlig.)

Aufgabe 4-6 Bilden die folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$?

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4-7 Man bestimme eine Basis des von den folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraumes

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4-8 Zu den folgenden zwei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ gebe man einen dritten Vektor an, so dass diese drei Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bitte bis Dienstag, 11.40 Uhr im online System ankreuzen, bis 11.50 Uhr im Teach Center als pdf hochladen. Getippte Lösungen sind erlaubt. Wir erinnern daran, dass jede(r) die eigenen Lösungen bis zur Deadline hochlädt.
Konkrete Fragen dazu bis Mittwoch vormittag bitte im TC stellen. Hinweise zu den Aufgaben werde ich am Ende der Mittwoch Vorlesung geben. (Dies ist dann formal Teil des sogenannten Konversatoriums).